Sci Annals, Fac. Phys. & Mathem., Univ. Thessaloniki, **14**, 167, (1974)

APPLICATIONS POLYNOMIALES HOMOGENES SUR UNE ALGEBRE DE FONCTIONS HOLOMORPHES

Par

V. FRANGOU

(Institut des Sciences Mathématiques, Université de Thessaloniki)

(Introduced by Prof. Anastassiadis)

(Received, 9.10.1974)

Résumé: *On définit les fonctionnelles analytiques de degré n et on étudie leurs conditions de continuité. On démontre qu'on peut approcher une fonctionnelle analytique de degré n par un polynôme du même degré.*

1. APPLICATIONS POLYNOMIALES HOMOGENES.

1.1 Soient E,F deux espaces vectoriels sur K où $K = R$ ou C.

On note $Hom^s(E^n,F)$ l'espace vectoriel sur C des applications n-linéaires symétriques de E^n dans F.

La définition suivante est bien connue [3,p.760]

Définition: Une application $P: E \to F$ est dite polynomiale homogène de degré n si et seulement s'il existe une application n-linéaire symétrique

$$\widetilde{P}(x_1, \ldots, x_n) \in Hom^s(E^n,F)$$

dont la restriction à la diagonale $D(E^n)$ soit P(x), c'est à dire:

$$P(x) = \widetilde{P}(x, \ldots, x) \quad , \quad x \in E.$$

Pour P donné, $\widetilde{P}$ est unique et l'on a [1, p.60]:

$$(1.1) \quad \widetilde{P}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum (-1)^{n-|\varepsilon|} P(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_n x_n)$$

où $\varepsilon_k = 0$ ou 1; $k = 1, 2, \ldots, n$; $|\varepsilon| = \sum_1^n |\varepsilon_k|$ et x_0 est un point arbitraire, mais fixe, de E.

Si l'on note $Q^n(E,F)$ l'espace vectoriel sur C des applications polynomiales homogènes de degré n de E dans F, l'application donnée par

(1.1) est un isomorphisme entre $Q^n(E,F)$ et $Hom^s(E^n,F)$.

De plus $\widetilde{P}$ est continue si et seulement si P est continue [3,p.765].

1.2 Nous utiliserons dans la suite le théorème suivant [2, p.8]

Théorème: Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$, F des espaces vectoriels topologiques sur un corps valué non discret K et $P \in Hom(E_1, \ldots, E_n, F)$. Il y a equivalence entre les propriétés:

a) $\widetilde{P}$ est continue en tout point,

b) $\widetilde{P}$ est continue en un point $x^o \in E_1 x \ldots x E_n$,

c) $\widetilde{P}$ est continue à l'origine de $E_1 x \ldots x E_n$.

2. FONCTIONNELLES ANALYTIQUES LINEAIRES

2.1 On considère l'algèbre $A(\Omega)$ des fonctions holomorphes dans un domaine $\Omega \subset C^n$. On construit de $A(\Omega)$ un espace vectoriel topologique sur C, qui est un espace de Fréchet, avec la topologie de la convergence uniforme sur tout compact [4, p.29].

Cette topologie est définie par la famille dénombrable de semi-normes $p_q(f) = \sup_{z \in K_q} | f(z) |$, où (K_q) est une suite exhaustive de compacts.

Les encembles $V_{q,n} = \left[f \in A(\Omega) \ : \ p_q(f) < \frac{1}{n}\right]$ forment une base de filtre F_o des voisinages de l'origine de $A(\Omega)$.

2.2 On a la définition suivante [4, p.37]

Définition: Une forme linéaire continue sur $A(\Omega)$ est appelée fonctionnelle analytique linéaire sur Ω. Alors les fonctionnelles analytiques linéaires sont les applications polynomiales homogènes de degré 1, de $A(\Omega)$ dans C, qui sont continues.

Une fonctionnelle analytique linéaire dans Ω est représentable par une mesure à support compact dans Ω [4, p.37].

2.3 Pour la topologie de $A(\Omega)$ on a la condition de continuité [4,p.37]

Proposition: Une forme linéaire $P: A(\Omega) \to C$ est une fonctionnelle analytique linéaire si, et seulement s'ils existent un naturel q et un nombre positif c, tels que, pour toute $f \in A(\Omega)$ on ait:

$$|P(f)| \leqq c p_q(f). \tag{2.1}$$

2.4 On va démontrer la proposition suivante:

Proposition: Les coefficients du développement de Taylor à l'origine, d'une fonction analytique sont des fonctionnelles analytiques linéaires.

Démonstration: Soit f(z) une fonction analytique dans le disque ouvert $D = [z \in C : |z| < 1]$. On considère le développement de f dans D :

$$f(z) = \sum a_n z^n.$$

D'après l'inégalité de Cauchy on a :

$$|a_n| \leqq M(\rho)\rho^{-n}$$

où $M(\rho) = \sup_{|z| \leqq \rho} |f(z)|$, pour chaque ρ tel que $0 \leqq \rho < 1$.

Si donc (K_q) est une suite exhaustive de compacts avec $K_q = \left[z \in C : |z| \leqq 1 - \frac{1}{q} = r_q\right]$, ils existent un naturel q et une constante $c_n > 0$, tels que :

$|a_n(f)| \leqq c_n p_q(f)$ où $c_n = \frac{1}{r_q^n}$ et $p_q(f) = \sup_{z \in K_q} |f(z)|$, c'est à dire $a_n(f)$ verifie la condition de continuité (2,1); $a_n(f)$ est donc une fonctionnelle analytique linéaire.

Cette fonctionnelle est représentable ou bien par

$$a_n(f) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

donc par une mesure de Dirac à l'origine [5,p.19], ou bien par la mesure

$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z| = r} \frac{f(z)dz}{z^{n+1}}$$

(formule intégrale de Cauchy).

3. FONCTIONNELLES ANALYTIQUES DE DEGRE n

3.1 Dans la suite nous examinerons le cas des fonctionnelles analytiques de degré n (où $n \geqq 2$).

Nous donnons d'abord la définition suivante:

Définition: Une fonctionnelle analytique de degré n est une application polynomiale homogène de degré n de $A(\Omega)$ dans C, qui est continue.

3.2 Soit $P_n(x)$ une application polynomiale homogène de degré n de

$A(\Omega)$ dans C et $\widetilde{P}(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Hom}^s(E^n, C)$, où $E = A(\Omega)$, l'application n-linéaire symétrique dont la restriction à la diagonale $D(E^n)$ est $P_n(x)$.

On va démontrer la proposition suivante:

Proposition: Pour que $\widetilde{P}$ soit continue il faut et il suffit qu'ils existent un n-uple $(q_1, \ldots, q_n)$ et une constante $c>0$, tels que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, on ait

$$(3.1) \qquad |\widetilde{P}(x_1, \ldots, x_n)| \leqq c p_{q_1}(x_1) \ldots p_{q_n}(x_n).$$

Démonstration:

I. La condition est nécessaire. En effet, soit $\widetilde{P}$ continue. Alors il existe un voisinage V_0 de l'origine 0 de $E^n = [A(\Omega)]^n$ sur lequel $\widetilde{P}$ est bornée; c'est à dire il existe $a>0$ tel que, pour chaque $(x_1, \ldots, x_n) \in V_0$, on ait:

$$|\widetilde{P}(x_1, \ldots, x_n)| \leqq a,$$

où

$$V_0 = V_1 x \ldots x V_n \text{ et } V_i = [x_i \in A(\Omega) : \; p_{q_i}(x_i) < \varepsilon_i], \; i = 1, \ldots, n.$$

Alors, quel que soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, le point $\left(\frac{\varepsilon}{p_{q_1}(x_1)} x_1, \ldots, \frac{\varepsilon}{p_{q_n}(x_n)} x_n\right)$, où $\varepsilon < \min(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, appartient à V_0 et par conséquent:

$$|\widetilde{P}(x_1, \ldots, x_n)| \leqq \frac{a}{\varepsilon^n} p_{q_1}(x_1) \ldots p_{q_n}(x_n) = c p_{q_1}(x_1) \ldots p_{q_n}(x_n).$$

II. La condition est suffisante. En effet les relations $p_{q_i}(x_i) < \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, entraînent

$$|\widetilde{P}(x_1, \ldots, x_n)| \leqq c \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n = a \quad \text{donné.}$$

Donc $\widetilde{P}$ est continue à l'origine et, d'aprés le théorème (1.2), $\widetilde{P}$ est continue partout.

3.3 A la diagonale on a:

$$|P_n(x)| = |\widetilde{P}(x, \ldots, x)| \leqq c p_{q_1}(x) \ldots p_{q_n}(x)$$

ou

$$|P_n(x)| \leqq c p_q^n(x),$$

où $\quad q = \max(q_1, \ldots, q_n)$.

On obtient alors la

Proposition: Pour que $P_n(x)$ soit une fonctionnelle analytique de degré n, il faut et il suffit qu'ils existent un naturel q et une constante $c>0$, tels que, pour tout $x \in A(\Omega)$ on ait:

$$|P_n(x)| \leqq cp_q^n(x). \tag{3.2}$$

3.4 On va démontrer mantenant la

Proposition: Soit $P_n(f)$ une fonctionnelle analytique de degré n de $A(\Omega)$ dans C, où $\Omega = [z \in C : |z| < 1]$.

Alors, il existe, pour chaque $\varepsilon > 0$, un polynôme $\varphi_\varepsilon(a_1(f), \ldots, a_{s(\varepsilon)}(f))$, tel que $|P_n(f) - \varphi_\varepsilon(a_1(f), \ldots, a_{s(\varepsilon)}(f))| < \varepsilon$ Le polynôme φ_ε est de degré n et le nombre naturel $s(\varepsilon)$ croit indéfiniment quand $\varepsilon \to 0$.

Démonstration: Soit $\widetilde{P}(f_1, \ldots, f_n) \in \mathrm{Hom}^s(E^n, C)$, où $E = A(\Omega)$, l'application n-linéaire symétrique qui coincide avec $P_n(f)$ sur la diagonale $D(E^n)$.

Soit $f \in A(\Omega)$. On a:

$$|a_n| \leqq \frac{M(\rho)}{\rho^n} \quad \text{où } 0 \leqq \rho < 1 \quad \text{et} \tag{3.3}$$

a_n sont les coefficients du développement de Taylor de f dans Ω.

Soit (K_q) une suite exhaustive de compacts dans Ω avec

$$K_q = [z \in C: |z| \leqq 1 - \frac{1}{q} = r_q].$$

Alors on a:

$$P_n(f) = P_n(\sum a_k z^k) = \widetilde{P}(\sum a_k z^k, \ldots, \sum a_k z^k).$$

Mais

$$\widetilde{P}(\sum a_k z^k, \ldots, \sum a_k z^k) = \sum \widetilde{P}(a_{k_1} z^{k_1}, \ldots, a_{k_n} z^{k_n}).$$

On va majorer chaque terme du développment

$$\sum \widetilde{P}(a_{k_1} z^{k_1}, \ldots, a_{k_n} z^{k_n}).$$

L'application $\widetilde{P}$ est continue. Donc ils existent (§ 3.2), un n-uple $(q_1, \ldots, q_n)$ et une constante $c > 0$, tels que:

$$|\widetilde{P}(z^{k_1}, \ldots, z^{k_n})| \leqq cp_{q_1}(z^{k_1}) \ldots p_{q_n}(z^{k_n}) = \tag{3.4}$$

$$= c(\sup_{z \in K_{q_1}} |z^{k_1}|) \ldots (\sup_{z \in K_{q_n}} |z^{k_n}|) \leqq c(1 - \frac{1}{q})^{k_1 + \cdots + k_n} = c r_q^{k_1 + \cdots + k_n},$$

où $q = \max(q_1, \ldots, q_n)$ et c indépendante de $k_1, \ldots, k_n$.

Alors, à l'aide de (3.3) et (3.4) on obtient:

$$|\widetilde{P}(a_{k_1} z^{k_1}, \ldots, a_{k_n} z^{k_n})| \leqq c[M(\rho)]^n \left(\frac{r}{\rho}\right)^{k_1 + \cdots + k_n},$$

où $r = r_q$ est tel que: $r \leqq \rho < 1$.

Donc chaque terme du développement $\sum \widetilde{P}(a_{k_1} z^{k_1}, \ldots, a_{k_n} z^{k_n})$ est majoré par $c[M(\rho)]\left(\frac{r}{\rho}\right)^N$, en posant $k_1 + \ldots + k_n = N$.

Par conséquent on a:

$$\sum \widetilde{P}(a_{k_1} z^{k_1}, \ldots, a_{k_n} z^{k_n}) \leqq cM(\rho)]^n \sum_{N=0}^{\infty} \binom{N+n-1}{n-1} k^N$$

où $k = \frac{r}{\rho} < 1$.

La série $\sum \binom{N+n-1}{n-1} k^N$ étant convergente, on conclut que la série $\sum a_{k_1} \ldots a_{k_n} \widetilde{P}(z^{k_1} \ldots z^{k_n})$ converge et la proposition est démontrée.

De plus la convergence est uniforme sur tout borné de $A(\Omega)$, c'est à dire sur les encembles $B \subset A(\Omega)$ pour lesquels la condition suivante est remplie [6, p.165]:

Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un nombre fini $\Psi(K)$ tel que l'on ait $|f(z)| \leqq \Psi(K)$ pour tout $z \in K$ et toute $f \in B$.

En effet, sur tout borné $B \subset A(\Omega)$, on a $M(\rho) \leqq \Psi(\rho)$ [$\Psi(\rho)$ fixe], alors, la série $\sum a_{k_1} \ldots a_{k_n} \widetilde{P}(z^{k_1}, \ldots, z^{k_n})$ converge uniformement sur B.

4. LE CAS $n = 2$.

4.1 Dans le cas où $n = 2$, on obtient:

$$P_2(f) = \lim_{N \to \infty} \left[\sum_1^N a_n^2 P_2(z^n) + 2 \sum_{n,m=1}^N a_n a_m \widetilde{P}(z_n, z_m) \right. \tag{4.1}$$

ou bien

$$P_2(f) = \sum a_n^2 l_n + 2\sum a_n a_m l'_{nm}$$

où les coefficients l_n, l'_{nm} sont donnés par des fonctionnelles sur les z^n.

Démonstration: Démontrons d'abord la relation:

$$P_2\Big(\sum_1^N a_n z^n\Big) = \sum_1^N a_n^2 P_2(z^n) + 2 \sum_{n,m=1}^N a_n a_m \widetilde{P}(z^n, z^m). \tag{4.2}$$

La relation (1.1), pour $n = 2$, nous donne:

$$P_2(f+g) = P_2(f) + P_2(g) + 2\widetilde{P}(f,g) \tag{4.3}$$

d'où on obtient:

$$P_2(a_1 z + a_2 z^2) = a_1^2 P_2(z) + a_2^2 P_2(z^2) + 2a_1 a_2 \widetilde{P}(z, z^2),$$

c'est à dire la relation (4.2) est valable pour $N = 2$.

On la suppose vraie pour $N = K$ et on la verifie pour $N = k + 1$:

$$P_2\Big(\sum_1^{k+1} a_n z^n\Big) = P_2\Big(\sum_1^k a_n z^n\Big) + a^2{}_{k+1}\ P_2(z^{k+1}) + 2\widetilde{P}\Big[\Big(\sum_1^k a_n z^n\Big),\ a_{k+1} z^{k+1}\Big] =$$

$$= \sum_1^{k+1} a_2^n P_2(z^n) + 2 \sum_{n,m=1}^{k+1} a_n a_m \widetilde{P}(z^n, z^m).$$

Mais, d'après la proposition (3.4), les séries $\sum a_n^2 P_2(z^n)$, $\sum a_n a_m \widetilde{P}(z^n, z^m)$ convergent pour toute $f \in A(\Omega)$.

Donc, en tenant compte la relation (4.2) on obtient (4.1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Bochnak and J. Siciak. Polynomials and multilinear mappings in topological vector spaces. Studia Mathematika 39(1) (1971) p. 59-76.

[2] N. Bourbaki. Espaces vectoriels topologiques I, Hermann, Paris 1953.

[3] Hille and Phillips. Functional Analysis and Semi-Groups. American Mathematical Society Vol. XXXI, 1957.

[4] P. Lelong. Fonctionnelles analytiques et fonctions entières, Cours de Montréal 1967.

[5] L. Schwartz. Théorie des distributions, Hermann, Paris 1966.

[6] H. Cartan. Théorie élémentaire des fonctions analytiques. Hermann, Paris 1961.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΑΙ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ ΕΠΙ ΜΙΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΟΛΟΜΟΡΦΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ὑπὸ

Β. ΦΡΑΓΚΟΥ

(Ἐκ τοῦ Μαθηματικοῦ Σπουδαστηρίου τοῦ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης)

Ὁρίζονται τὰ ἀναλυτικὰ συναρτησιακὰ (fonctionnelles) βαθμοῦ n καὶ μελετῶνται αἱ συνθῆκαι συνεχείας αὐτῶν. Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι δυνατὴ ἡ προσέγγισις ἑνὸς ἀναλυτικοῦ συναρτησιακοῦ βαθμοῦ n ὑπὸ ἑνὸς πολυωνύμου τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ.