ΑΣΥΝΕΧΗΣ ΡΥΣΙΣ ΤΕΛΕΙΟΥ ΚΑΙ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ ΕΝΤΟΣ ΔΙΩΡΥΓΟΣ ΕΧΟΥΣΗΣ ΣΤΕΡΕΟΝ ΕΜΠΟΔΙΟΝ ΠΡΟΣΚΕΚΟΛΛΗΜΕΝΟΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΙΑΝ ΤΩΝ ΠΑΡΕΙΩΝ ΑΥΤΗΣ

ΥΠΟ

ΑΘΑΝ. ΙΩ. ΜΠΡΟΪΚΟΥ
ΠΟΛ. ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ
ΔΙΔΑΚΤΟΡΟΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἡ παροῦσα διατριβὴ ἐπιχειρεῖ νὰ φέρῃ συμβολὴν εἰς τὴν ἐπίλυσιν τοῦ κλασσικοῦ προβλήματος τῆς ἀσυνεχοῦς κινήσεως ἑνὸς ῥευστοῦ τελείου, ὁμογενοῦς καὶ ἀσυμπιέστου, συναντῶντος στερεὸν ἐμπόδιον. Ἀναφέρεται εἰς τὴν μελέτην τῆς ἐπιπέδου μονίμου καὶ ἀστροβίλου ῥύσεως ἑνὸς ὑγροῦ ἐντὸς διώρυγος περιοριζομένης ὑπὸ στερεῶν παρειῶν, φερούσης στερεὸν καὶ ἀμετακίνητον ἐμπόδιον προσκεκολλημένον εἰς τὴν ἑτέραν τῶν παρειῶν, περίπτωσις ἥτις ἀντιστοιχεῖ μὲ ἱκανὴν προσέγγισιν πρὸς τὴν ῥύσιν τοῦ ὕδατος ἐντὸς ποταμοῦ ἢ διώρυγος φέροντος πρόβολον διευθετήσεως λ. χ. ἢ γενικώτερον τοῖχον - ἐμπόδιον. Ἡ μελέτη αὕτη καθαρῶς μαθηματικὴ ἐγένετο διὰ τῆς κομψῆς καὶ εὐφυοῦς μεθόδου τῶν Kirchoff καὶ Helmholtz, τῆς ὁποίας αἱ ἀρχαὶ ἔχουσιν ἀναλυτικῶς ἐκτεθῆ ὑπὸ τοῦ καθηγητοῦ κ. Umberto Cisotti εἰς τὸ μοναδικὸν εἰς τὸ εἶδός του σύγγραμμα «Idromeccanica Piana».

Μετὰ βραχεῖαν εἰσαγωγὴν καὶ ὑπόμνησιν θεμελιωδῶν τινων ἀρχῶν τῆς Ἐπιπέδου Ὑδροδυναμικῆς ὡς καὶ τοῦ παραδόξου τοῦ d'Alembert, εἰς τὸ Ιον Μέρος, ἐκθέτομεν λίαν συντόμως τὴν νεωτέραν «θεωρίαν τῆς ἠρέμου ζώνης» διὰ τῆς ὁποίας ἐχειρίσθημεν τὸ θέμα. Εἰς τὸ ΙΙον μέρος ἐκθέτομεν τὸ ἀντικείμενον τῆς μελέτης, τὴν θέσιν αὐτοῦ ἐν σχέσει πρὸς τὰς μέχρι τοῦδε δημοσιευθείσας ἐργασίας τῶν κ. κ. U. Cisotti καὶ H. Villat καὶ προβαίνομεν ἀμέσως εἰς μίαν μετατόπισιν τοῦ προβλήματος εἰς τὸ σχετικῶς ἁπλούστερον τοιοῦτον τοῦ «ὑγροῦ νήματος». Ἐν συνεχείᾳ τίθενται αἱ γενικαὶ συνθῆκαι ὡς καὶ αἱ ὁριακαὶ τοιαῦται τῆς κινήσεως ἐν προσαρμογῇ πρὸς τὴν φυσικὴν εἰκόνα αὐτῆς, εἶτα μετατοπίζονται αἱ οὕτω τεθεῖσαι συνθῆκαι ἐπὶ ἑνὸς εἰκονικοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου τῶν ζ, ἐπὶ τοῦ ὁποίου θὰ ἐπιτευχθῇ ὁ ὑπολογισμὸς τῶν στοιχείων τῆς κινήσεως δι' ἁπλῶν τετραγωνισμῶν. Εἰδικώτερον προσδιορίζομεν τὸ «Μιγαδικὸν Δυναμικόν», θεμελιώδη συνάρτησιν τῆς ὁποίας ἡ γνῶσις συνεπάγεται τὴν ἄμεσον τοιαύτην τῆς ῥύσεως τοῦ ῥευστοῦ εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς κινήσεως, ὑπὸ τὸν ὅρον τῆς ἐξευρέσεως τῆς συναρτήσεως τῆς ἐκφραζούσης τὴν σύμμορφον καὶ διπλῶς μονότιμον ἀπεικόνισιν μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων z καὶ ζ. Ἐκ τοῦ μιγαδικοῦ δυναμικοῦ συνάγομεν εὐχερῶς τὴν γενικὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.

Πράγματι, ἡ ἐν λόγῳ γενικὴ λύσις θὰ μᾶς ἐπιτρέψῃ εἰς τὸ IIIον μέρος, νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ κινητικά, γεωμετρικὰ καὶ δυναμικὰ στοιχεῖα τῆς κινήσεως ὑπὸ μορφὴν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων. Τούτων πάλιν δίδομεν τὸν ἀναλυτικὸν ὑπολογισμὸν διὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ εὐθυγράμμου ἐμποδίου σχηματίζοντος τυχοῦσαν γωνίαν α μὲ τὴν ἑτέραν τῶν στερεῶν καὶ εὐθυγράμμων παρειῶν τῆς διώρυγος.

Τὸ IVον μέρος τῆς ἐργασίας ἀναφέρεται εἰς τὴν «Ἀντίστασιν» τοῦ ἐμποδίου ἥτις ἀποτελεῖ τὴν κυριωτέραν ἄγνωστον τοῦ προβλήματος, εἰς τὴν ὅλως γενικὴν περίπτωσιν διώρυγος μὲ παρειὰς τυχούσης μορφῆς, μὲ ἐμπόδιον οἱουδήποτε σχήματος. Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς ἀντιστάσεως ἐπιτυγχάνεται διὰ δύο διαφόρων μεθόδων ἀλληλοεπαληθευομένων. Ἓν κλασσικὸν θεώρημα τοῦ κ. U. Cisotti ἀναφερόμενον εἰς τὴν συμμετρικὴν διώρυγα μὲ ἀξονικὸν συμμετρικὸν ἐμπόδιον ἐπανευρίσκεται ἰσχῦον καὶ διὰ τὴν ἡμετέραν περίπτωσιν.

Τέλος εἰς τὸ Vον μέρος μελετῶνται καὶ διερευνῶνται εἰδικαί τινες ἐνδιαφέρουσαι ὁριακαὶ περιπτώσεις. Ἡ ἐφαρμογὴ τῆς ἀρχῆς τῶν εἰδώλων ἐπέτρεψε πολλάκις δι' ἁπλῶν συλλογισμῶν νὰ ἐπανεύρωμεν γνωστά τινά ἀποτελέσματα ἢ καὶ νὰ δικαιολογήσωμεν πλήρως μερικὰς μεταβάσεις εἰς τὸ ὅριον. Ἐπὶ τοῦ σημείου τούτου ἄς μοὶ ἐπιτραπῇ νὰ ἔχω τὴν προσωπικὴν γνώμην ὅτι ἡ ἀρχὴ τῶν εἰδώλων δύναται νὰ καταστήσῃ λίαν γόνιμον τὴν ἀκολουθουμένην μέθοδον ἐρεύνης εἰς τὰ προβλήματα τῆς Ἐπιπέδου Ὑδρομηχανικῆς.

Ἡ ἐργασία αὕτη ἐξεπονήθη εἰς τὴν Σχολὴν τῶν Φυσικῶν καὶ Μαθηματικῶν Ἐπιστημῶν τοῦ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, ὑπὸ τὴν διεύθυνσιν τοῦ τακτικοῦ καθηγητοῦ τῆς Θεωρητικῆς Μηχανικῆς κ. Ὄθωνος Πυλαρινοῦ πρὸς τὸν ὁποῖον ἐκφράζω τὰς θερμοτάτας μου εὐχαριστίας διὰ τὴν εὐγενῆ γενικὴν καθοδήγησιν καὶ παρακολούθησιν. Εὐχαριστῶ ἐπίσης τὸν κ. Θ. Βαρόπουλον τακτικὸν καθηγητὴν τῆς Ἀνωτέρας Ἀναλύσεως ὡσαύτως ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ Θεσσαλονίκης διὰ τὸ εὐγενὲς ἐνδιαφέρον ὅπερ ἐπέδειξε πρὸς ἐμὲ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς ἐργασίας ταύτης.

Τέλος θεωρῶ ἐμαυτὸν ἐξαιρετικῶς εὐτυχῆ νὰ ἐκφράσω τὴν ἄπειρόν μου εὐγνωμοσύνην πρὸς τὸν γνωστὸν καὶ διακεκριμμένον καθηγητὴν τῆς Θεωρητικῆς Μηχανικῆς ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ Μιλάνου καὶ ἐν τῷ Πολυτεχνείῳ Μιλάνου κ. Umberto Cisotti, ὁ ὁποῖος οὐδενὸς κόπου φεισθεὶς ἐνεθάρρυνε, καθωδήγησε καὶ ἐν τέλει εὐηρεστήθη νὰ κρίνῃ τὴν μικρὰν ταύτην ἐργασίαν μὲ τὸ ἰδιαίτερον κῦρος τοῦ πρωτεργάτου καὶ θεμελιωτοῦ τοῦ σχετικῶς νέου τούτου κλάδου τῆς ἐπιστήμης.

«ΑΣΥΝΕΧΗΣ ΡΥΣΙΣ ΤΕΛΕΙΟΥ ΚΑΙ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ ΕΝΤΟΣ ΔΙΩΡΥΓΟΣ ΠΕΡΙΟΡΙΖΟΜΕΝΗΣ ΥΠΟ ΣΤΕΡΕΩΝ ΠΑΡΕΙΩΝ ΚΑΙ ΦΕΡΟΥΣΗΣ ΕΜΠΟΔΙΟΝ ΑΜΕΤΑΚΙΝΗΤΟΝ ΠΡΟΣΚΕΚΟΛΛΗΜΕΝΟΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΙΑΝ ΤΩΝ ΠΑΡΕΙΩΝ»

ΜΕΡΟΣ Ι

1. *Ἱστορικὸν καὶ Εἰσαγωγή*. Ἡ μελέτης τῆς κινήσεως ἑνὸς ῥευστοῦ τελείου καὶ εἰδικώτερον ἀσυμπιέστου (ὑγροῦ), συναντῶντος στερεὸν ἐμπόδιον ἀποτελεῖ τὸ καλούμενον «Τυπικὸν πρόβλημα τῆς συγχρόνου Ὑδροδυναμικῆς» πρόβλημα τὸ ὁποῖον ἀπησχόλησεν ἐπὶ μακρὸν τοὺς γεωμέτρας καὶ ἀποτελεῖ καὶ σήμερον ἀκόμη ἀντικείμενον θεωρητικῶν καὶ πειραματικῶν ἐρευνῶν. Ἡ πρακτικὴ ὠφελιμότης αὐτοῦ εἶναι πλέον ἢ προφανὴς ἐξ αἰτίας τῶν πολλαπλῶν ἐφαρμογῶν τεχνικῆς φύσεως.

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου ἐν τῷ χώρῳ εὑρίσκεται ἀκόμη μακρὰν τῆς πραγματοποιήσεως λόγῳ τῶν ἀνυπερβλήτων δυσχερειῶν αἱ ὁποῖαι ἐμφανίζονται εἰς τὴν ὁλοκλήρωσιν τῶν θεμελιωδῶν ἐξισώσεων τῆς Ὑδροδυναμικῆς, ἀκόμη καὶ εἰς τὰς ἁπλουστέρας τῶν περιπτώσεων. Ἀλλ' εἰς τὰς περιπτώσεις τῆς ἐπιπέδου κινήσεως (δηλ. κινήσεως ἐκτελουμένης παραλλήλως πρὸς σταθερὸν ἐπίπεδον), ἡ λύσις τοῦ προβλήματος προωθήθη σημαντικῶς ἐν τῇ γενικῇ αὐτῆς μορφῇ —καὶ μάλιστα εἰς εἰδικάς τινας περιπτώσεις ἐπετεύχθησαν πλήρεις ἀναλυτικαὶ λύσεις— ὑπὸ τῶν νεωτέρων ἐρευνητῶν, μεταξὺ τῶν ὁποίων δίκαιον εἶναι νὰ κατατάξωμεν ἐπὶ κεφαλῆς τὴν Ἰταλικὴν Σχολὴν μὲ τοὺς καθηγητὰς κ. κ. Levi-Civita, Umb. Cisotti κλπ. ἀκολουθουμένους ἐν Γαλλίᾳ ὑπὸ τῶν κ. κ. Henri Villat, R. Thiry κλπ. Τὰ γενικὰ ἀποτελέσματα, ἐνίοτε λίαν ὑψηλοῦ χαρακτῆρος, εἰς τὰ ὁποῖα οὗτοι κατέληξαν, δίδουσι μίαν μορφὴν τῆς κινήσεως τοῦ ῥευστοῦ προσεγγίζουσαν μὲ ἱκανοποιητικὴν ἀκρίβειαν τὴν πραγματικὴν φυσιογνωμίαν τοῦ ὑδροδυναμικοῦ φαινομένου καὶ ἀκριβέστερον τὰς ἀπ' εὐθείας πειραματικὰς μετρήσεις τὰς ἀφορώσας τὴν ἀντίστασιν τὴν προβαλλομένην ὑπὸ τοῦ στερεοῦ ἐμποδίου, ἀπὸ τριπλῆς ἀπόψεως : γεωμετρικῆς, κινητικῆς καὶ δυναμικῆς.

Ἡ ἀκολουθουμένη μέθοδος ὑπό τῶν συγχρόνων τούτων Μαθηματικῶν ὀφειλομένη εἰς τοὺς Φυσικοὺς Helmholtz (1868) καὶ Kirchoff (1869), ἐφαρμοσθεῖσα διαδοχικῶς ὑπὸ πλειάδος φυσικῶν καὶ γεωμετρῶν (Rethy, Bobyleff, Joukowski, Lowe, Lord Rayleigh, Kelvin κλπ.) θεμελιωθεῖσα φυσικῶς ὑπὸ τοῦ Brillouin ἀπεδείχθη ἐξαιρετικὰ γόνιμος εἰς ἀποτελέσματα χάρις εἰς τὰς ἁπλᾶς καὶ εὐφυεῖς μεθόδους τῶν ὁποίων κάμνει χρῆσιν.

Ἡ μέθοδος αὕτη χρησιμοποιεῖ τὰς ἀναλυτικὰς συναρτήσεις μιᾶς μιγαδικῆς μεταβλητῆς πρὸς ἔκφρασιν τῆς ῥύσεως, τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν ἀγνώστων συναρτήσεων καὶ τὴν σύμμορφον ἢ ἰσογώνιον ἀπεικόνισιν τοῦ πεδίου ῥοῆς εἰς ἓν ἢ πλείονα μιγαδικὰ ἐπίπεδα ἐπὶ τῶν ὁποίων αἱ γενικαὶ ἀπροσδιόριστοι συνθῆκαι ὡς καὶ αἱ ὁριακαὶ τοιαῦται τῆς κινήσεως τοῦ ῥευστοῦ λαμβάνουσιν ἐξαιρετικῶς ἁπλῆν μορφήν, τοῦθ' ὅπερ ἐπιτρέπει τὸν ὑπολογισμὸν τῶν στοιχείων τῆς κινήσεως διὰ τετραγωνισμῶν.

2. *Γενικοὶ χαρακτῆρες τῆς κινήσεως* Ἐν τοῖς κατωτέρω θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται περὶ κινήσεως ῥευστοῦ τελείου (ἄνευ ἰξώδους), ἀσυμπιέστου καὶ ὁμογενοῦς, τοῦ ὁποίου ἡ πυκνότης παραμένουσα σταθερὰ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως δύναται νὰ ληφθῇ ἴση πρὸς τὴν μονάδα, διὰ καταλλήλου ἐκλογῆς τοῦ συστήματος τῶν μονάδων. Τὸ ὑγρὸν κινεῖται παραλλήλως πρὸς ἓν σταθερὸν ἐπίπεδον δηλ. ὅλα τὰ ὑγρὰ μόρια τὰ κείμενα ἐπὶ μιᾶς καθέτου ἐπὶ τὸ ῥηθὲν διευθῦνον ἐπίπεδον εἰς ὡρισμένην χρονικὴν στιγμὴν ἔχουσι τὴν αὐτὴν ταχύτητα παράλληλον πρὸς τὸ διευθῦνον ἐπίπεδον.

Τῆς κινήσεως ἀρχομένης ὑποτίθεται ὅτι ἀποκατεστάθη ἡ μόνιμος ῥύσις δηλ. ὅτι ἡ ὄψις τῆς ῥύσεως εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ χρόνου. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τυχὸν ῥευστὸν στοιχεῖον μετατοπίζεται κατὰ τὸν ἀπειροστὸν χρόνον dt ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τοῦ διανύσματος - ταχύτης ὅπερ συνεπάγεται ὡς γνωστόν, τὴν σύμπτωσιν τῶν γραμμῶν ῥεύματος (καμπύλαι περιβάλλουσαι τῶν ταχυτήτων) μετὰ τῶν τροχιῶν τῶν ὑγρῶν μορίων.

Θὰ ὑποθέσωμεν ἐπὶ πλέον ὅτι τὸ ὑγρὸν εὑρίσκεται ἐν ἠρεμίᾳ εἰς τὸ ἐπ' ∞ σημεῖον καὶ ὅτι τὸ σῶμα - ἐμπόδιον κινεῖται ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ μὲ ταχύτητα τὴν ὁποίαν θὰ παραδεχθῶμεν ἴσην πρὸς τὴν μονάδα εἰς τὸ ἐπ' ∞ κατάντι, διὰ καταλλήλου ἀλλαγῆς τῶν μονάδων, καὶ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα ox. Δυνάμει τῆς ἀρχῆς τῶν σχετικῶν κινήσεων ἡ κίνησις κατ' οὐδὲν μεταβάλλεται ἐὰν δεχθῶμεν ὅτι τὸ ἐμπόδιον μένει ἀκίνητον καὶ ὅτι τὸ ῥευστὸν κινεῖται μὲ δοθεῖσαν ταχύτητα V_∞ εἰς τὸ ἐπ' ∞ ἀνάντι καὶ ἴσην πρὸς τὴν μονάδα εἰς τὸ ἐπ' ∞ κατάντι. Τὸ παράδοξον ἀποτέλεσμα τοῦ Dubuat καθ' ὃ πειράματα πραγματοποιηθέντα ὑπὸ τὰς δύο ἀνωτέρω ἐκτεθείσας ὑποθέσεις δὲν ἔδιδον, διὰ τὴν τοῦ ἐπὶ τοῦ στερεοῦ ἀσκουμένην πίεσιν, τὴν αὐτὴν τιμήν, διελευκάνθη πλήρως ὑπὸ τοῦ N. Joukowski[1] ὡς ὀφειλόμενον ἀποκλειστικῶς καὶ μόνον εἰς λεπτομερειακὰς ἐλαττωματικὰς διατάξεις τῶν πειραμάτων.

Τέλος δεχόμεθα ὅτι ἡ κίνησις εἶναι ἀστρόβιλος ἐφ' ὁλοκλήρου τοῦ πεδίου τῆς ῥοῆς. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εἶναι γνωστὸν ὅτι ὑπάρχει ἓν δυναμικὸν τῶν ταχυτήτων, δηλ. μιὰ συνάρτησις φ (x, y) τοιαύτη ὥστε αἱ συνιστῶσαι u καὶ v κατὰ τοὺς ἄξονας ox καὶ oy τῆς ταχύτητος V, δίδονται ὑπὸ τῶν σχέσεων:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

καὶ ὅτι ἡ συνάρτησις φ εἶναι ἁρμονική, τ. ἔ. ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Laplace:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y} = 0$$

ἐξ αἰτίας τῆς ἐξισώσεως συνεχείας:

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

ἥτις εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ὑγροῦ ἐκφράζει τὸ ἀσυμπίεστον αὐτοῦ.

Ἡ αὐτὴ ἐξίσωσις (1) ἐκφράζει ὅτι ἡ διαφορικὴ παράστασις

$$- v.\, dx + u.\, dy$$

εἶναι τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν μιᾶς συναρτήσεως ψ (x, y, t), προσδιοριζομένης κατὰ προσέγγισιν σταθερᾶς. Δυνάμεθα ὅθεν νὰ θέσωμεν:

$$- v.\, dx + u.\, dy = d\,\psi$$

δηλ.
$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

[1] Βλ. Aérodynamique de Joukowski, G. V, 1936.

Ἡ οὕτω εἰσαγομένη συνάρτησις $\psi\,(x, y, t)$ καλεῖται συνάρτησις τοῦ Stokes ἢ ἀκόμη συνάρτησις τοῦ ῥεύματος, διότι ἡ ἐξίσωσις:

$$\psi = C^{te}$$

δίδει τὰς γραμμὰς ῥεύματος, συμπιπτούσας μὲ τὰς τροχιὰς τῶν ὑγρῶν μορίων εἰς τὴ περίπτωσιν τῆς μονίμου ῥύσεως, τῆς σταθερᾶς C λαμβανούσης εἴτε ὅλας τὰς τιμὰς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$, εἴτε τιμὰς περιλαμβανομένας μεταξὺ δοθέντων ὁρίων, ἀναλόγως τῶν περιπτώσεων (Λ. χ. ἀπὸ 0 μέχρι q ἐντὸς διώρυγος, διὰ καταλλήλου ἐκλογῆς.)

Οὕτω ἔχωμεν:

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{\delta\varphi}{\delta x} = \frac{\delta\psi}{\delta y} \\ v &= \frac{\delta\varphi}{\delta y} = -\frac{\delta\psi}{\delta x} \end{aligned}\right.$$

τοῦθ᾿ ὅπερ ἐκφράζει,—συνθῆκαι μονογενείας τοῦ Cauchy—ὅτι ἡ συνάρτησις

$$f = \varphi + i\,\psi$$

καλουμένη Μιγαδικὸν Δυναμικόν, εἶναι συνάρτησις ἀναλυτικὴ τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς $z = x + iy$. Ἐπὶ πλέον ἡ ψ εἶναι ἐπίσης συνάρτησις ἁρμονική. Αἱ συναρτήσεις φ καὶ ψ καλοῦνται συζυγεῖς ἢ συνεζευγμέναι.

Ἡ γνῶσις τοῦ μιγαδικοῦ δυναμικοῦ f συνεπάγεται βεβαίως τὴν ἄμεσον τοιαύτην ὁλοκλήρου τῆς κινήσεως τοῦ ῥευστοῦ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ z, ἀλλὰ θεωροῦμεν ἀπαραίτητον νὰ ὑπογραμμίσωμεν ἀπὸ τοῦδε ὅτι ὁ προσδιορισμὸς τῆς συναρτήσεως f ὑπὸ μορφὴν ἀναλυτικὴν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ z δὲν καθίσταται ἐφικτὸς ἢ μὴ εἰς ἐλαχίστας λίαν ἁπλᾶς περιπτώσεις. Τέλος προσθέτομεν ὅτι λέγοντες «κίνησιν τοῦ ῥευστοῦ» ἐννοοῦμεν ἐκ τοῖς κατωτέρω τὸν ὑπολογισμὸν τῶν γεωμετρικῶν, κινητικῶν καὶ δυναμικῶν στοιχείων τῆς ῥύσεως καὶ ὅτι μεταξὺ τῶν στοιχείων τούτων πρωτεύουσαν θέσιν κατέχει ἡ Ἀντίστασις τοῦ στερεοῦ ἐμποδίου δηλ. ἡ γενικὴ συνισταμένη τῶν ἐπὶ τοῦ ἐμποδίου ἀσκουμένων πιέσεων ὑπὸ τοῦ ἐν κινήσει ῥευστοῦ. Ο ὑπολογισμὸς αὐτῆς εἶναι θεμελιώδους σημασίας διὰ τὴν τέχνην τῶν ἀεροδυναμικῶν κατασκευῶν.

3. Τὸ παράδοξον τοῦ d'Alembert. Ἡ θεωρία τῆς ἠρέμου ζώνης. (Théorie du sillage). Ἡ μελέτη τῆς κινήσεως ἑνὸς ῥευστοῦ συναντῶντος τυχὸν ἐμπόδιον διὰ τῶν γενικῶν ἐξισώσεων τῆς Ὑδροδυναμικῆς ἐνῶ δίδει μίαν εἰκόνα ἀρκούντως προσεγγίζουσαν τοῦ πραγματικοῦ φυσικοῦ φαινομένου, καταλήγει ὅσον ἀφορᾶ τὴν ἀντίστασιν τοῦ ἐμποδίου εἰς ἀποτέλεσμα ὅλως ἀντίθετον πρὸς τὴν φυσικὴν πραγματικότητα. Τόσον εἰς τὴν Ἐπίπεδον Ὑδροδυναμικὴν (Βλ. π. χ. Mécanique Rationnelle τοῦ Appell, Tome III, σελ. 526), ὅσον καὶ εἰς τὴν ἐν τῷ χώρῳ τοιαύτην,[a] εὑρίσκεται ὅτι ἡ Γενικὴ συνισταμένη τῶν ἐπὶ τοῦ ἐμποδίου ἀσκουμένων πιέσεων ὑπὸ τοῦ ἐν κινήσει ῥευστοῦ ἔχει συνιστῶσαν παράλληλον πρὸς τὴν κατεύθυνσιν τοῦ ῥεύματος ἴσην πρὸς μηδέν.

Τὸ φυσικῶς ἀπαράδεκτον τοῦτο ἀποτέλεσμα, ἀντίθετον πρὸς τὸ πείραμα καὶ τὴν πραγματικότητα ἀποτελεῖ τὸ γνωστὸν ἐν τῇ ἱστορίᾳ τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης «παράδοξον τοῦ d' Alembert» τεθὲν ὑπὸ τοῦ διασήμου γεωμέτρου τῷ 1768, ἐν τῷ ὑπομνήματι αὐτοῦ «Paradoxe posé aux géomètres sur la Résistance des Fluides».[1]

Τὸ περίεργον τοῦτο ζήτημα ὑπῆρξεν ἀντικείμενον ἀναζητήσεων ἐπιφανῶν Μαθηματικῶν καὶ Φυσικῶν ἐπὶ ἕνα αἰῶνα περίπου καὶ μόλις κατὰ τὸ ἔτος 1868-1869 οἱ Helmholtz καὶ Kirchoff ἐθεμελίωσαν τὴν νέαν θεωρίαν τοῦ διακένου δηλ. τῆς ἀσυνεχοῦς κινήσεως ἡ ὁποία ἐπέτρεψε τὴν ἀποφυγὴν τοῦ παραδόξου τοῦ d' Alembert.[2] Μεταξὺ τῶν ὑποθέσεων ἐφ' ὧν ἐστηρίζοντο οἱ ὑπολογισμοὶ καὶ αἵτινες ἄγουσιν εἰς τὸ ῥηθὲν παράδοξον ὑπάρχει μία τοὐλάχιστον ἀντίθετος πρὸς τὴν φυσικὴν πραγματικότητα. Ἡ ὑπόθεσις αὕτη εἶναι ἡ τῆς Συνεχείας: Πράγματι, διὰ τῶν θεμελιωδῶν

---

[a] Βλ. Γενικὴν ἀπόδειξιν τοῦ παραδόξου τοῦ d'Alembert ἐν τῷ χώρῳ, εἰς «Apercus théoriques» τοῦ H. Villat, σελ. 21, γενικεύουσαν τὴν τοῦ κ. Cisotti.

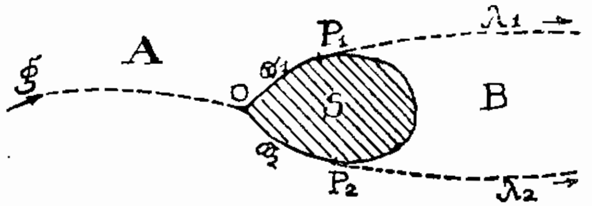
[1] Ἰδοὺ πῶς ἐκφράζεται ὁ d' Alembert:

«..... Je ne vois donc pas, je l'avoue, comment on peut expliquer d'une manière satisfaisante, la Résistance des Fluides. Il me paroit au contraire que cette théorie, traitée et approfondie avec toute la rigueur donne au moins en plusieurs cas, la résistance absolument nulle; paradoxe singulier que je laisse à éclairer aux géomètres.

[2] Βλ. τὸ ὑπόμνημα τοῦ A. Massotti «Appunti storici sul paradosso di d'Alembert» (Periodieo di Matematiehe, 1928) ἔνθα ἐκτίθενται κατὰ τρόπον σαφῆ καὶ σύντομον αἱ διαδοχικαὶ φάσεις τῶν προσπαθειῶν τῶν γεωμετρῶν ὅπως θεμελιώσωσι μίαν θεωρίαν ἀποφεύγουσαν τὸ παράδοξον τοῦ d'Alembert. Μεταξὺ τῶν διαφόρων ἐργασιῶν δίκαιον εἶναι νὰ ἐξάρωμεν τὰς τῶν: Poisson, Green, Plana, Stokes, Diriehlet, Helmholtz καὶ Kirchoff κατὰ τὸν 19ον αἰῶνα. Αἱ νεώτεραι ἐργασίαι τῶν κ. κ. Levi-Givita, Umb. Cisotti καὶ H. Villat ἐπεβεβαίωσαν πλήρως τὴν νέαν θεωρίαν.

ἐξισώσεων τῆς Ὑδροδυναμικῆς καὶ τῆς ἐξισώσεως τῆς συνεχείας γίνεται δεκτὸν ὅτι αἱ πιέσεις καὶ αἱ ταχύτητες μεταβάλλονται κατὰ τρόπον συνεχῆ εἰς ὁλόκληρον τὸ ὑπὸ τοῦ ῥευστοῦ διαρρεόμενον τμῆμα τοῦ χώρου. Ἀλλ' ἐὰν ἡ πραγματοποίησις ἀσυνεχειῶν διὰ τὰς πιέσεις ἑνὸς ῥευστοῦ ἐν μονίμῳ ῥύσει εἶναι ἀνέφικτος τὸ πείραμα δεικνύει ὅτι προκειμένου διὰ τὰς ταχύτητας, εἶναι κάλλιστα δυνατὴ μία ἀσυνέχεια. Ὁ σχηματισμὸς ἐπιφανειῶν ἀσυνεχείας ἐν τῷ χώρῳ ἢ γραμμῶν ἀσυνεχείας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, διὰ τὰς ταχύτητας, ἐφ' ὧν ἡ ταχύτης τοῦ ῥευστοῦ ὑφίσταται ἀπότομον πεπερασμένην μεταβολὴν διὰ μέσου αὐτῶν ἐνῷ μεταβάλλεται συνεχῶς ἔνθεν καὶ ἔνθεν αὐτῶν, εἶναι δυνατὸς ὡς ἀποδεικνύεται πειραματικῶς. Ἡ παρουσία τοιούτων ἐπιφανειῶν ἐξηγεῖ π. χ. τὴν νεκρὰν ἢ ἤρεμον ζώνην ἥτις παρατηρεῖται ὄπισθεν τοῦ ἀνεμοθραύστου ἑνὸς αὐτοκινήτου ἐν κινήσει.

Πρὸς ἀποφυγὴν τοῦ παραδόξου τοῦ d'Alembert οἱ Γεωμέτραι ἠναγκάσθησαν νὰ ἐγκαταλείψωσι τὴν ὑπόθεσιν τῆς συνεχείας ὅσον ἀφορᾷ τὰς ταχύτητας καὶ νὰ παραδεχθῶσιν ὅτι τὸ ἐν κινήσει ῥευστὸν συναντᾷ τὸ ἐμπόδιον S διά τινος νήματος ῥοῆς g εἰς τὸ σημεῖον O ἔνθα ἡ ταχύτης αὐτοῦ μηδενίζεται (Νεκρὸν σημεῖον), μεθ' ὃ τὸ νῆμα g διαχάζεται εἰς δύο διακεκριμμένα ὑγρὰ νήματα κινούμενα ἐν συνεχῇ ἐπαφῇ μετὰ τῶν παρειῶν ω_1 καὶ ω_2 τοῦ στερεοῦ μέχρι τῶν σημείων P_1 καὶ P_2 (σχ. 1). Εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα τὸ ῥευστὸν ἀποκολλᾶται καὶ ἀκολουθεῖ πλέον τὰς γραμμὰς ῥεύματος λ_1 καὶ λ_2, καλουμένας γραμμὰς ἐλευθέρας ἢ ἀκόμη γραμμὰς ὀλισθήσεως, διότι τὸ ἐν κινήσει ῥευστὸν δι' αὐτῶν ὀλισθαίνει ἐπὶ τοῦ ῥευστοῦ τοῦ κατέχοντος τὴν περιοχὴν B, ἐντὸς τῆς ὁποίας περιοχῆς τὸ ῥευστὸν παραμένει ἤρεμον καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως. Ἡ τελευταία αὕτη ὑπόθεσις, τῆς δημιουργίας δηλ. μιᾶς ζώνης στασίμου καὶ ἠρέμου ὄπισθεν τοῦ ἐμποδίου ἀποτελεῖ τὴν καλουμένην «θεωρίαν τῆς ἠρέμου ζώνης», θεωρίαν ἡ ὁποία θὰ μᾶς ἐπιτρέψῃ νὰ ἀποφύγωμεν τὸ παράδοξον τοῦ d'Alembert, ὡς ἄλλωστε θὰ ἀποδειχθῇ καὶ ἐν τῇ παρούσῃ ἐργασίᾳ. Ἡ θεωρία αὕτη ἀποτελεῖ μίαν πρώτην προσέγγισιν πρὸς τὴν ἀληθῆ φυσιογνωμίαν τῆς πραγματικῆς ῥύσεως τοῦ ῥευστοῦ. Αἱ γραμμαὶ λ_1 καὶ λ_2 ὑποτίθενται ἐκτεινόμεναι μέχρι τοῦ ἐπ' ∞ κατάντι πρὸς ἀποφυγὴν τῶν ἀρνητικῶν πιέσεων



Σχ. 1.

(παράδοξον τοῦ Brillouin),[1] ἐπὶ πλέον αὗται στρέφουσι τὰ κοῖλα αὐτῶν πρὸς τὸ ἐν ἠρεμίᾳ ῥευστόν. Κατὰ συνέπειαν τὸ εὖρος τῆς ἠρέμου περιοχῆς πρὸς τὰ ὄπισθεν τοῦ ἐμποδίου οὐδέποτε ἐλαττοῦται ὅταν ἀπομακρυνόμεθα τοῦ ἐμποδίου, τὸ πολὺ δύναται νὰ τείνῃ πρὸς ἓν ὅριον, διὰ τὴν διεύθυνσιν λ. χ. τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν γενικὴν κατεύθυνσιν τοῦ ῥεύματος.

Διὰ τὴν γέννεσιν τῆς ἀσυνεχοῦς κινήσεως δὲν εἶναι τὸ ἰξῶδες—ὡς θὰ ἠδύνατό τις νὰ πιστεύσῃ ἐκ πρώτης ὄψεως—ὅπερ παίζει τὸν σπουδαιότερόλον ἀλλ' ἡ ἀστάθεια τῶν ἀρνητικῶν πιέσεων. Περιορίζομαι μόνον νὰ ὑπενθυμίσω τὸ ζήτημα τοῦτο ὅπερ θεωρεῖται λεπτότατον ἐν τῇ Φυσικῇ. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ ἰξῶδες τοῦ φυσικοῦ ῥευστοῦ ὑπεισέρχεται πρὸς τὰ ὄπισθεν τοῦ ἐμποδίου μὲ ἀποτέλεσμα τὴν βαθμιαίαν διάλυσιν τῆς ἐπιφανείας ἀσυνεχείας εἰς σπειροειδεῖς σχηματισμοὺς οἱ ὁποῖοι εἶναι στρόβιλοι. Παρ' ὅλα ταῦτα τὰ ἀποτελέσματα τῶν ὑπολογισμῶν συμφωνοῦσιν ἱκανοποιητικῶς μὲ τὰς πειραματικὰς ἀπ' εὐθείας μετρήσεις—ἰδίᾳ ὡς πρὸς τὴν ἀντίστασιν—ὡς τοῦτο ἐβεβαιώθη κατ' ἐπανάληψιν διὰ τῶν πειραμάτων τοῦ Camichel (1922) καὶ Escande - Teissier - Solier (1930).[2]

Ἡ θεωρία τῆς ἠρέμου ζώνης ἐγένετο ὁριστικῶς δεκτὴ ἐν τῇ ἐπιστήμῃ μόνον μετὰ τὴν βαθεῖαν διερεύνησιν τοῦ Brillouin καὶ τὴν θεμελίωσιν αὐτῆς ὑπὸ τοῦ ἰδίου ἐπὶ τῆς ἀρχῆς τῆς ἐλαχίστης κινητικῆς ἐνεργείας,[3] τοῦθ' ὅπερ διέλυσε τὰς ἐπικρίσεις καὶ ἀντιρρήσεις τοῦ Kelvin, εἰς τρόπον ὥστε σήμερον θεωρεῖται ὡς ἡ θεωρία ἡ πλέον ἐγγίζουσα τὴν φυσικὴν πραγματικότητα τῆς ῥύσεως ἑνὸς ὑγροῦ συναντῶντος ἐμπόδιον.[4]

---

[1] Βλ. εἰς «Apercus théoriques» de H. Villat, Scientia Oct. 1920, σελ. 25, μίαν ἀπόδειξιν τῆς ὑπάρξεως τοῦ παραδόξου τοῦ d'Alembert καὶ διὰ τῆς θεωρίας τοῦ διακένου ἀκόμη, ὅταν ὑποτίθενται αἱ γραμμαὶ λ_1 καὶ λ_2 συναντώμεναι εἰς πεπερασμένην ἀπόστασιν πρὸς τὰ κατάντι.

[2] Βλ. «Mécanique des Fluides» H. Villat, σελ. 154.

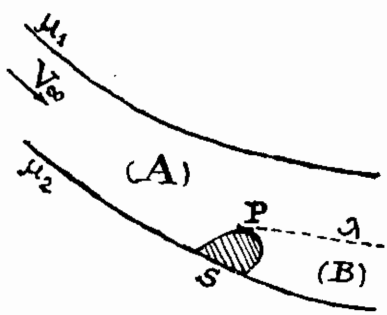
[3] Βλ. «Mécanique Rationnelle» τοῦ Appell, Tome III, σελ. 530.

[4] Ὑπογραμμίζω, ὁμοῦ μετὰ τοῦ H. Villat, ὅτι ἡ διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ ἐφαρμογὴ τῶν ὑποθέσεων τῆς θεωρίας τῆς ἠρέμου ζώνης ἀποτελεῖ λεπτὸν μαθηματικὸν πρόβλημα. Χάρις εἰς τὰς μεθόδους τῶν Levi-Civita καὶ Umb. Cisotti, ἔχει ἐρευνηθῇ πληθώρα προβλημάτων. Αἱ ἐργασίαι τοῦ κ. H. Villat ἐπὶ τοῦ προβλήματος τοῦ Dirichlet ἐν τῷ κυκλικῷ δακτυλίῳ αἵτινες ἔδωσαν τὸν ὁμώνυμον τύπον διὰ τῶν ἐλλειπτικῶν συναρτήσεων, ἐπέτρεψαν τὸν χειρισμὸν συνθέτων καὶ ποικίλων περιπτώσεων.

Τέλος δὲν εἶναι ἄσκοπον νὰ προσθέσω ὅτι ἡ θεωρία τοῦ Benard-Karmann ἐπιτρέπει νὰ προσεγγίσῃ τις τὰ προβλήματα ἐπὶ τοῦ διακένου μετὰ στροβίλων. (Mécanique des Fluides, H. Villat).

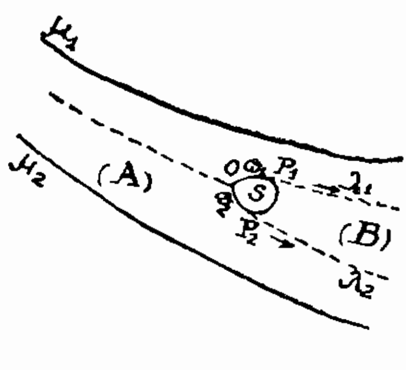
ΜΕΡΟΣ ΙΙ

4. ***Ἀντικείμενον μελέτης.*** Διὰ τῆς παρούσης διατριβῆς προτιθέμεθα νὰ μελετήσωμεν τὴν κίνησιν ἑνὸς τελείου ῥευστοῦ ἀσυμπιέστου, ἐντὸς διώρυγος, συναντῶντος ἓν στερεὸν ἐμπόδιον προσκεκολλημένον εἰς τὴν ἑτέραν τῶν στερεῶν παρειῶν αὐτῆς (σχ. 2). Ἡ κίνησις ὑποτίθεται ἐπίπεδος, μόνιμος καὶ ἀστρόβιλος ἢ ὡς εἴθισται νὰ λέγεται «κατὰ Helmholtz».



Σχ. 2.

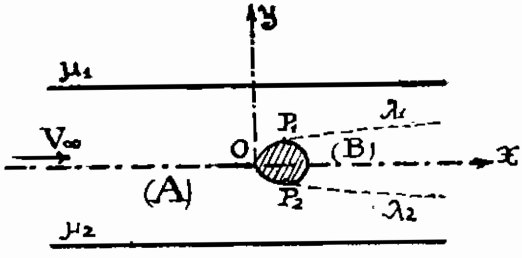
Εἰς τὴν ἀπολύτως γενικὴν περίπτωσιν τοῦ σχ. 2, μὲ τυχούσας στερεὰς παρειὰς μ_1 καὶ μ_2 καὶ ἐμπόδιον S οἱασδήποτε μορφῆς τὸ πρόβλημα ἐνέχει μορφὴν ἀπολύτως γενικὴν καὶ καθαρῶς θεωρητικὴν καὶ θὰ ἔπρεπε νὰ κατευθύνῃ τις τὴν μελέτην πρὸς τὴν ἐντελῶς γενικὴν περίπτωσιν: τῆς ἀσυνεχοῦς κινήσεως ῥευστοῦ ἐντὸς διώρυγος μὲ παρειὰς τυχούσας καὶ φερούσης ἐμπόδιον τυχὸν κατὰ θέσιν καὶ σχῆμα (σχ. 3).



Σχ. 3.

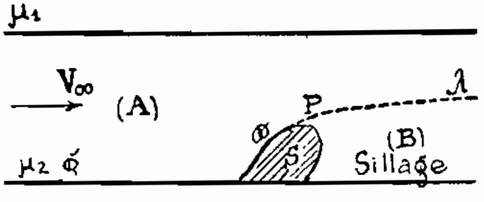
Ἡ περίπτωσις αὕτη ἔχει μελετηθῇ ὑπὸ τοῦ καθηγητοῦ κ. H. Villat («Mouvement d'un solide dans un canal», Annales de l'École Normale, 1912). Ἡ λύσις αὕτη ἀπολύτως γενικοῦ χαρακτῆρος δίδει τὴν γενικὴν μορφὴν τῶν στοιχείων τῆς κινήσεως διὰ τῶν ἐλλειπτικῶν συναρτήσεων. Τοιουτοτρόπως ὁ κ. Villat ἐγενίκευσε προγενεστέραν ἀξιόλογον ἐργασίαν τοῦ καθηγητοῦ κ. U. Cisotti («Sul moto di un solido in un canale» Rendiconti del Circolo Matématico di Palermo, 1909) ἀναφερομένην εἰς τὴν μελέτην τῆς κατὰ Hemholtz κινήσεως τελείου καὶ ἀσυμπιέστου ῥευστοῦ ἐντὸς συμμετρικῆς διώρυγος (σχ. 4) ὡς πρὸς οx, μὲ παρειὰς εὐθυγράμμους καὶ παραλλήλους, συναντῶντος ἐμπόδιον συμμετρικῶς διατεταγμένον ὡς πρὸς τὸν ἄξονα οx.

Ἡ κομψὴ λύσις τοῦ κ. Cisotti ὁδηγεῖ εἰς ἀποτελέσματα λίαν ἀξιόλογα καὶ ἐξαιρετικῆς ἁπλότητος διά τινα στοιχεῖα τῆς κινήσεως, ὑπὸ ἀναλυτικὴν μορφήν, ἐπιδεκτικὰ τεχνικῶν ἐφαρμογῶν.



Σχ. 4.

Ἀφίνοντες κατὰ μέρος τὴν ἀπολύτως γενικὴν περίπτωσιν τοῦ σχ. 2, θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὴν περίπτωσιν τῆς διατάξεως τοῦ σχ. 5 ἀναφερομένης εἰς διώρυγα περιοριζομένην ὑπὸ δύο στερεῶν παρειῶν μ_1 καὶ μ_2, εὐθυ-

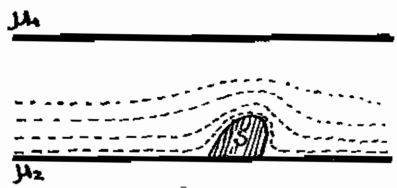


Σχ. 5.

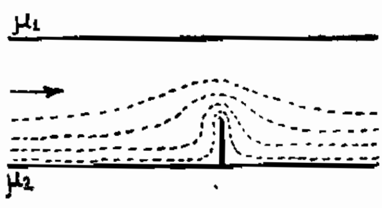
γράμμων καὶ παραλλήλων, μὲ στερεὸν ἐμπόδιον προσκεκολλημένον εἰς τὴν μίαν ἐκ τῶν 2 στερεῶν παρειῶν, τὴν μ_2 π. χ. Τὸ σχῆμα τοῦ ἐμποδίου ὑποτίθεται οἱονδήποτε ὑπὸ μόνον τὸν περιορισμὸν ὅτι εἶναι ὁμαλὸν δηλ. τοιοῦτον ὥστε τὸ ῥευστὸν ἐν τῇ ῥύσει αὐτοῦ μένει ἐν συνεχῇ ἐπαφῇ μετὰ τῆς παρειᾶς ϖ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως. (Ἐξαιρέσει ἐνδεχομένως εἰς πεπερασμένον πλῆθος περιοχῶν ἔνθα ἡ ταχύτης θὰ ἐμηδενίζετο μὲ σχηματισμὸν ἐνδιαμέσων γραμμῶν ἀσυνεχείας. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ πορεία τῆς ἐργασίας θὰ ἦτο ἡ αὐτή, πλὴν ὅμως μακρά).

Ἡ περίπτωσις αὕτη εἶναι προφανῶς ἡ τῆς ῥύσεως ὑγροῦ ἐντὸς διώρυγος ἢ ποταμοῦ φέροντος πρόβολον ἢ τεχνικὸν ἔργον προσκεκολλημένον εἰς τὴν ἑτέραν τῶν ὀχθῶν (διευθέτησις κοίτης, προστασία ὄχθης κλπ) καὶ συνεπῶς τὸ ἀπὸ τεχνικῆς ἀπόψεως ἐνδιαφέρον τοῦ προβλήματος εἶναι πλέον ἢ προφανές.

Ὁ καθηγητὴς κ. U. Cisotti ὑπ᾽ ὄψιν τοῦ ὁποίου ἔθεσα τὸ θέμα τοῦτο, εὑρὼν αὐτὸ πρωτότυπον καὶ ἐνδιαφέρον μὲ ἐνεθάρρυνε καὶ μὲ προέτρεψεν εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ἐργασίας ταύτης διὰ τῆς ἀπὸ 1 Μαρτίου 1938 ἐπιστολῆς του, διακρίνας δύο περιπτώσεις δυναμένας νὰ μελετηθῶσι διὰ τῶν γνωστῶν μεθόδων.



Σχ. A_1



Σχ. A_2

Ἡ πρώτη περίπτωσις (σχ. A_1) ἀναφέρεται εἰς συνεχῆ ῥύσιν δηλ. ἄνευ ἠρέμου ζώνης. Ἡ περίπτωσις αὕτη ἐμελετήθη ὑπὸ τοῦ Joukowski[1] ἀλλὰ μόνον διὰ τὴν εἰδικὴν διάταξιν τοῦ σχ. A_2 ἀναφερομένην εἰς ἐμπόδιον λεπτὸν (ἄνευ πάχους, lame) εὐθύγραμμον καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν κατεύθυνσιν τοῦ ῥεύματος. Εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας (σχ. A_1 καὶ σχ. A_2) προσκρούομεν βεβαίως εἰς τὸ παράδοξον τοῦ d'Alembert καὶ συνεπῶς ἡ μελέτη τῆς περιπτώσεως τοῦ σχ. A_1 (συνεχὴς ῥύσις) θὰ ἐνεῖχεν ἐνδιαφέρον ἠλαττωμένον ἐκ τοῦ γεγονότος τούτου ἐὰν μὴ ἀπαράδεκτον, κατὰ τὰς κρατούσας σήμερον ἀντιλήψεις.

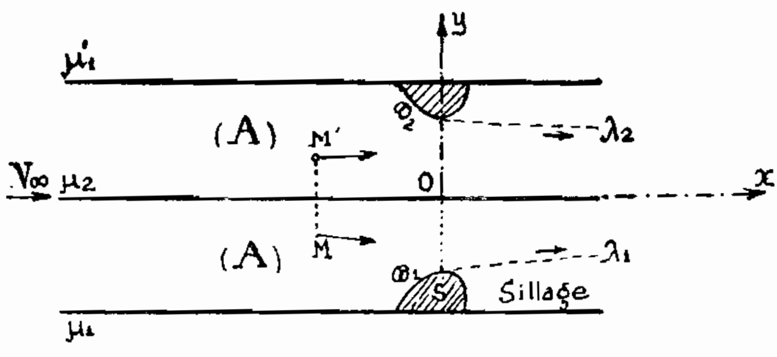
Ἡ δευτέρα περίπτωσις εἶναι ἡ τοῦ σχ. 5 καὶ ἀναφέρεται εἰς ἀσυνεχῆ ῥύσιν διὰ τῆς θεωρίας τῆς ἠρέμου ζώνης (Théorie du Sillage). Αὕτη εἶναι τὸ ἀντικείμενον τῆς μελέτης μας.

---

1 «Théorie tourbillonaire de l'hélice propulsive» G. V. 1929.

Καθ' ἃ ἀνωτέρω ἐξετέθη: τὸ ῥευστὸν ἐκκινῆσαν ἐκ τοῦ ἐπ' ∞ ἀνάντι μὲ δεδομένην πεπερασμένην ταχύτητα $V\infty$, ῥέει μεταξὺ τῶν δύο στερεῶν παρειῶν μ_1 καὶ μ_2 (σχ 5) Ὑγρὸν τι νῆμα g κινεῖται ἐφαπτομένως τῇ παρειᾷ μ_2 τῆς διώρυγος, εἶτα τῇ παρειᾷ ω τοῦ ἐμποδίου μέχρι σημείου τινος P, ἀγνώστου ἐκ τῶν προτέρων, ὁπόθεν ἀποκολλᾶται ἵνα σχηματίσῃ ἐν συνεχείᾳ τὴν ἐλευθέραν ἢ γραμμὴν ὀλισθήσεως λ. Αὕτη ἐκτείνεται μέχρι τοῦ ἐπ' ∞ κατάντι (Brillouin) πρὸς ἀποφυγὴν ἀρνητικῶν πιέσεων ἐν τῷ ῥευστῷ, στρέφει τὰ κοῖλα αὐτῆς πρὸς τὸ ἐν ἠρεμίᾳ ῥευστὸν καὶ τείνει ἀσυμπτωτικῶς πρὸς μίαν διεύθυνσιν παράλληλον τῇ παρειᾷ μ_1. Τόσον πρὸς τὰ ἀνάντι ὅσον καὶ πρὸς τὰ κατάντι εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν δεχόμεθα ὅτι ἡ διώρυξ ἔχει πεπερασμένην διατομὴν καὶ ὅτι ἡ μόνιμος ῥύσις ἔχει ἀποκατασταθῇ.

5. ***Μετατόπισις τοῦ προβλήματος.*** Θεωρῶ ὑγρὸν πυκνότητος ρ ἴσης σταθερῶς πρὸς τὴν μονάδα εἰς ὁλόκληρον τὸ πεδίον ῥοῆς A (σχ. 6), κινούμενον ἐπιπέδως μονίμως καὶ ἀστροβίλως ἐντὸς διώρυγος περιοριζομένης ὑπὸ δύο στερεῶν, εὐθυγράμμων καὶ παραλλήλων παρειῶν μ_1 καὶ μ_2. Τὸ ὑγρὸν ἄρχεται κινούμενον ἐκ τοῦ ἐπ' ∞ ἀνάντι μὲ δεδομένην ταχύτητα $V\infty$. Ὑγρόν τι νῆμα g κινεῖται ὡς ἀνωτέρω ἐξετέθη εἰς τρόπον ὥστε νὰ



Σχ. 6.

σχηματίσῃ τὴν ἐλευθέραν γραμμὴν λ_1. Τὸ ὑγρόν, ἀπὸ τοῦ σημείου ἀποκολλήσεως P_1 καὶ ἐπέκεινα ῥέει μεταξὺ τῆς παρειᾶς μ_2 καὶ τῆς γραμμῆς λ_1.

Παρατηρῶ ὅτι ἐὰν ἐπεκτείνω τὸ πεδίον τῆς ῥοῆς (A) συμμετρικῶς ὡς πρὸς τὴν παρειὰν μ_2 θεωρουμένην ὡς ἄξονα ox, λαμβάνω ἓν νέον πεδίον ῥοῆς A+A', μορφῆς συμμετρικῆς ὡς πρὸς ox καὶ τοιοῦτον ὥστε ἡ κίνησις τοῦ ῥευστοῦ νὰ εἶναι συμμετρική ὡς πρὸς ox δηλ. εἰς δύο συμμετρικὰ σημεῖα M καὶ M′ ὅλα τὰ στοιχεῖα τῆς κινήσεως εἶναι ἴσα. Εἰδικώτερον ἡ ταχύτης λαμβάνει συζυγεῖς τιμὰς καὶ ἑπομένως ἴσας κατ᾽ ἀπόλυτον τιμήν. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὰ διανύσματα-ταχύτητες τῶν ῥευστῶν στοιχείων τῶν κινουμένων ἐπὶ τοῦ ἄξονος-παρειᾶς μ_2 κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τούτου τῆς συμμετρίας, ἐν ἄλλαις λέξεσι ἡ παρειὰ μ_2 καθίσταται γραμμὴ ῥεύματος ὡς αὕτη ἦτο εἰς τὸ ἀρχικὸν πεδίον A. Εἶναι ἐπίσης φανερὸν ὅτι αἱ γραμμαὶ λ_1 καὶ λ_2 εἶναι γραμμαὶ ῥεύματος. Κατὰ συνέπειαν: ἡ μελέτη καὶ ἡ γνῶσις τῆς κινήσεως τοῦ ῥευστοῦ ἐν τῷ πεδίῳ $A+A'$ ἢ $(\mu_1 + \omega_1 + \lambda_1, \mu'_1 + \omega_2 + \lambda_2)$ συνεπάγεται ἀμέσως τὴν ὁλοτελῆ γνῶσιν τῆς κινήσεως εἰς τὸ δοθὲν ἀρχικὸν πεδίον A τοῦ προβλήματός μας.

Ἄλλωστε καὶ ἀντιστρόφως, ἀναφερόμενος εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν Εἰδώλων τοῦ Sir William Thomson[1] ἀντιλαμβάνομαι εὐχερῶς ὅτι εὑρίσκομαι ἐπὶ παρουσίᾳ δύο διακεκριμμένων περιοχῶν A καὶ A′ τοῦ ὑγροῦ, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει ἰδίαν κίνησιν καὶ μάλιστα τοιαύτην ὥστε οὐδὲν στοιχεῖον τῆς περιοχῆς A νὰ διαπερᾷ τὴν χωριστικὴν γραμμὴν μ_2, ὡς ἐπίσης οὐδὲν στοιχεῖον τῆς A′ δηλ. ἡ κίνησις τῆς περιοχῆς A εἶναι ἡ εἰκὼν τῆς κινήσεως τῆς A′ ὡς πρὸς μ_2 καὶ τἀνάπαλιν. Συνεπῶς δύναμαι, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ἀρχὴν τῶν εἰδώλων, χωρὶς νὰ ἀλλοιώσω τὴν κίνησιν τῆς A, νὰ καταργήσω τὸ ὑγρὸν A′ ὑπὸ τὸν ὅρον νὰ πραγματοποιήσω ὑλικῶς τὴν γραμμὴν μ_2 ὑπὸ μορφὴν διαφράγματος, καὶ ἐπανέρχομαι οὕτω εἰς τὸ ἀρχικὸν πεδίον A τοῦ ὑπ᾽ ὄψιν προβλήματος. Ἑπομένως τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀρχῆς ταύτης τὸ πρόβλημά μας μετατοπίζεται εἰς τὸ σχετικῶς ἁπλούστερον τοιοῦτον τοῦ ὑγροῦ νήματος. Ἐπὶ πλέον ἡ συμμετρικότης τοῦ πεδίου ῥοῆς ἁπλοποιεῖ σημαντικῶς τὴν ἐργασίαν, ὡς τοῦτο θέλει ἀποδειχθῇ κατωτέρω.

6. *Ἀναλυτικαὶ συνθῆκαι*. Λαμβάνω τὸ σημεῖον O μέσον τῆς P_1P_2 ὡς ἀρχὴν συστήματος ἀναφορᾶς ὀρθογωνίων καρτεσιανῶν συντεταγμένων. Ὁ ἄξων ox ἔχει κατεύθυνσιν τὴν πρὸς τὰ κατάντι ἀσυμπτωτικὴν κατεύθυνσιν τοῦ ὑγροῦ νήματος (σχ. 7).

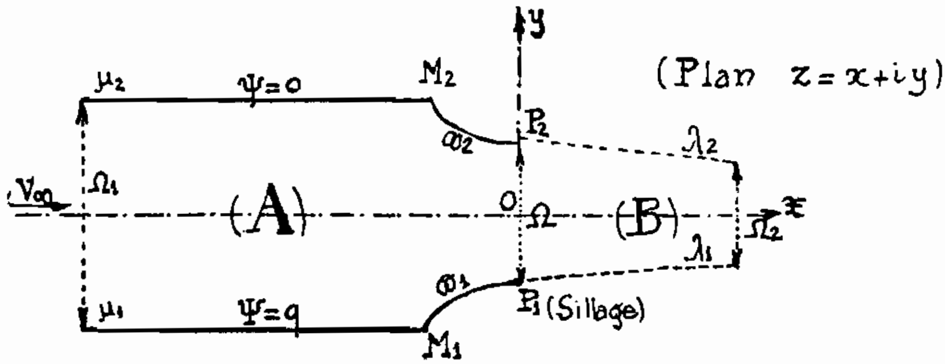
Ἔστω $V\infty$ ἡ ταχύτης τῶν ῥευστῶν στοιχείων εἰς τὸ ἐπ᾽ ∞ ἀνάντι, ποσότης δοθεῖσα καὶ πεπερασμένη, Ω_1 ἡ σταθερὰ διατομὴ τῆς διώρυγος. Καλῶ Ω_2 τὸ ἀσυμπτωτικὸν εὖρος τοῦ ὑγροῦ νήματος εἰς τὸ ἐπ᾽ ∞ κατάντι καὶ q τὴν δοθεῖσαν σταθερὰν παροχὴν τοῦ ῥεύματος. Εἶναι προφανὲς ὅτι:

$$q = V\infty \,.\, \Omega_1 = 1 \,.\, \Omega_2$$

[1] Βλ. «Traité de Mécanique Rationelle» τοῦ P. Appel, Tome III, σελ. 387.

ἀφοῦ δεχόμεθα (ἀλλαγὴ μονάδων) ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ ῥευστοῦ εἰς τὸ ἐπ' ∞ κατάντι εἶναι ἴση πρὸς τὴν μονάδα.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ V τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τῆς ταχύτητος τυχόντος ῥευστοῦ στοιχείου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς ῥύσεως $z = x + iy$, διὰ ϑ τὴν



Σχ. 7.

γωνίαν τὴν σχηματιζομένην ὑπὸ τῆς ταχύτητος V μὲ τὴν κατεύθυνσιν τοῦ ἄξονος ox καὶ διὰ w τὴν μιγαδικὴν ταχύτητα δηλ.

$$w = u - iv$$

ἔνθα u καὶ v εἶναι αἱ συνιστῶσαι τῆς V κατὰ τοὺς ἄξονας ox καὶ oy, ἔχομεν τοὺς κάτωθι γνωστοὺς τύπους:

$$w = u - iv = V.e^{-i\vartheta} = V\cos\vartheta - i.V.\sin\vartheta$$

Παρατηρῶ ὅτι:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{εἰς τὸ ἐπ' } \infty \text{ ἀνάντι} & \text{ἔχω:} & w = V\infty.e^{-i\vartheta} = V\infty \\ \text{καὶ εἰς τὸ ἐπ' } \infty \text{ κατάντι} & \text{» :} & w = 1 \end{array}\right\} \quad (\alpha)$$

Αἱ συναρτήσεις ψ καὶ φ. Αἱ γραμμαὶ $\mu_1 + \varpi_1 + \lambda_1$ καὶ $\mu_2 + \varpi_2 + \lambda_2$ (σχ. 7) εἶναι βέβαια γραμμαὶ ῥεύματος συνάμα δὲ καὶ τροχιαί, ἀφοῦ ὑποτίθεται ὅτι ἡ μόνιμος ῥύσις ἔχει ἀποκατασταθῇ. Ἐκ τούτου ἕπεται κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῆς Ἐπιπέδου Ὑδρομηχανικῆς[1] ὅτι ἡ συνάρτησις τοῦ Stokes ψ ἢ συνάρτησις τοῦ ῥεύματος ὀφείλει νὰ διατηρήσῃ σταθερὰν τιμὴν ἐφ' ἑκατέρας τῶν ἐν λόγῳ γραμμῶν. Δύναμαι νὰ λάβω $\psi = 0$ ἐπὶ τῆς γραμμῆς $\mu_2 + \varpi_2 + \lambda_2$, ἀλλὰ τότε ἡ τιμὴ τῆς ψ ἐπὶ τῆς γραμμῆς $\mu_1 + \varpi_1 + \lambda_1$ δέον νὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν δοθεῖσαν παροχὴν q τῆς διώρυγος, καθότι δυνάμει ἑτέρου γνωστοῦ θεωρήματος [1] τῆς Ἐπιπέδου Ὑδρομηχανικῆς ἔχομεν:

$q = \psi_S - \psi_D =$ διαφορὰ τῶν τιμῶν τῆς ψ ἐπὶ τῶν παρειῶν τῆς διώρυγος.

Ἐξ ἄλλου τὸ δυναμικὸν τῶν ταχυτήτων φ αὐξάνει — ὡς εἶναι γνωστὸν — διαρκῶς ἐπὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς ῥεύματος, ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$. Ὥστε ἡ συνάρτησις φ λαμβάνει ὅλας τὰς τιμὰς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$ ἐπὶ τῶν δύο γραμμῶν $\mu_1 + \varpi_1 + \lambda_1$ καὶ $\mu_2 + \varpi_2 + \lambda_2$.

Ἐλεύθεροι γραμμαί. Ἂν λάβωμεν ὑπ᾿ ὄψιν τὸ γεγονὸς ὅτι αἱ γραμμαὶ λ_1 καὶ λ_2 εἶναι ἐλεύθεροι γραμμαί, κατὰ γνωστὸν θεώρημα [1] ἡ συνάρτησις ψ ὡς καὶ ἡ ταχύτης V θὰ διατηρῶσι σταθερὰν τιμὴν ἐπὶ τῶν γραμμῶν λ_1 καὶ λ_2. Ἡ συνάρτησις ψ μηδενίζεται ἐπὶ τῆς λ_2 ἐξ ὑποθέσεως ὅπερ συνεπάγεται $\psi = q$ ἐπὶ λ_1, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω. Ὅσον ἀφορᾷ τὴν ταχύτητα V, ἀφοῦ αἱ γραμμαὶ λ_1 καὶ λ_2 ἐκτείνονται καθ᾿ ὑπόθεσιν μέχρι τοῦ ἐπ᾿ ∞ κατάντι (θεωρία ἠρέμου ζώνης) καὶ ἀφοῦ εἰς τὸ ἐπ᾿ ∞ τοῦτο πρὸς τὰ κατάντι σημεῖον ἔχομεν $V = 1$ (ὑπόθεσις ἰσοδύναμος πρὸς ἀλλαγὴν τῶν μονάδων), ἕπεται ὅτι:

$V = 1$ ἐπὶ τῶν γραμμῶν λ_1 καὶ λ_2

Ἡ συνάρτησις τοῦ Levi-Civita. Εἰσάγω ἤδη, ὁμοῦ μετὰ τοῦ Levi-Civita [2] τὴν συνάρτησιν ω ἴσην καθ᾿ ὁρισμὸν πρός:

$\omega = \vartheta + i\tau$, καὶ συνδεομένην μετὰ τῆς w ὑπὸ τῆς σχέσεως $w = e^{-i\omega}$ καὶ λαμβάνω συμβατικῶς $\omega = 0$ εἰς τὸ σημεῖον $z = +\infty + iy$ ἔνθα ὡς γνωστὸν $w = 1$. Ἔχω τότε:

(1) $w = e^{-i\omega} = e^{-i(\vartheta + i\tau)} = e^{\tau}\, e^{-i\vartheta}$

καὶ ἐπειδή: (2) $w = V\, e^{-i\vartheta}$

ἕπεται ὅτι: $V = e^{\tau}$

ἐξ οὗ $\tau = \mathrm{Log}.V$

Οὕτω συνάγομεν ὅτι τὸ μέγεθος τ εἶναι ὁ Λογάριθμος τῆς ἀπολ. τιμῆς τῆς ταχύτητος. Ὅσον ἀφορᾷ τὸν ἀριθμὸν ϑ οὗτος—ὡς εἶναι προφανὲς ἐκ

---

[1] Βλ. Idrom. Piana. U. Cisotti, σελ. 65.

[2] Βλ. Idr. Piana, U. Cisotti σελ. 158.

τῶν σχέσεων (1) καὶ (2)—παριστάνει τὴν γωνίαν τὴν σχηματιζομένην ὑπὸ τῆς ταχύτητος V μετὰ τοῦ + 0x.

Ἐκ τῶν ἄνω συνάγεται ὅτι ἐπὶ τῶν γραμμῶν λ_1 καὶ λ_2 δέον νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$V = |w| = e^{\tau} = 1$$

δηλ. $$\tau = \mathrm{Log}.1 = 0$$

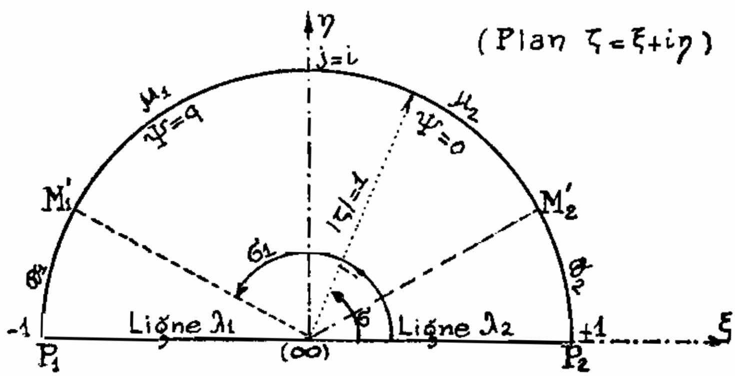
Συμπεραίνομεν οὕτω ὅτι: ἡ συνάρτησις ω ὀφείλει νὰ διατηρῇ πραγματικὰς τιμὰς ἐπὶ τῶν ἐλευθέρων γραμμῶν λ_1 καὶ λ_2.

7. *Μεταφορὰ τῶν ἀναλυτικῶν συνθηκῶν εἰς τὸν ἡμί - κυκλον τοῦ ἐπιπέδου ζ.* —Προβαίνω ἤδη εἰς τὴν μεταφορὰν τῶν ἐκτεθεισῶν (ἄρ. 6) ἀναλυτικῶν συνθηκῶν τοῦ προβλήματος, εἰς ἓν νέον εἰκονικὸν μιγαδικὸν ἐπίπεδον $\zeta = \xi + i\eta$, ἐφ' οὗ προτίθεμαι νὰ ἀπεικονίσω ἰσογωνίως τὸ πεδίον τῆς ῥύσεως A + B. Τὸ πεδίον τοῦτο ἔχει σχῆμα ἄγνωστον πρὸς τὸ παρὸν καθότι αἱ γραμμαὶ λ_1 καὶ λ_2 ἔχουσι μορφὴν ἄγνωστον ἐκ τῶν προτέρων καὶ ἡ θέσις τῶν σημείων ἀποκολλήσεως P_1 καὶ P_2 εἶναι ἀπροσδιόριστος δι' ἐμπόδιον σχήματος τυχόντος. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον οὐδόλως εἶναι ἐφικτὸς ὁ ἀπ' εὐθείας προσδιορισμὸς τῆς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως $z = z\ (\zeta)$ τῆς ἐπιτρεπούσης τὴν σύμμορφον καὶ κατὰ τρόπον διπλῶς μονότιμον ἀπεικόνισιν τοῦ ἐπιπέδου ῥοῆς εἰς ἕνα κλειστὸν τόπον τοῦ νέου ἐπιπέδου $\zeta = \xi + i\eta$. Πάντως ἐπειδὴ τὸ πεδίον ῥοῆς εἶναι ἁπλῶς συναφές, θὰ προσπαθήσω νὰ ἀπεικονίσω αὐτὸ συμμόρφως εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ἡμικύκλου $|\zeta| = 1,\ \eta \geq 0$, τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου $\zeta = \xi + i\eta$. Πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον θὰ κάμω χρῆσιν γνωστοῦ τεχνάσματος.

Καθ' ἃ ἐξέθεσα, δὲν δύναμαι ἀπὸ τοῦδε νὰ προσδιορίσω τὴν σχέσιν μεταξὺ z καὶ ζ ἥτις ἐκφράζει τὴν σύμμορφον καὶ κατὰ τρόπον διπλῶς μονότιμον ἀπεικόνισιν τοῦ πεδίου A + B ἐπὶ τοῦ ἡμικύκλου $|\zeta| = 1,\ \eta \geq o$. Ἀλλὰ τὸ θεώρημα τῆς ὑπάρξεως τοῦ Riemann, μὲ βεβαιοῖ ὅτι ἡ σχέσις αὕτη ὑπάρχει καὶ ἐξαρτᾶται ἐκ τριῶν αὐθαιρέτων σταθερῶν δυναμένων νὰ προσδιορισθῶσιν εἰς τρόπον ὥστε τρία τυχόντα σημεῖα τοῦ συνόρου τοῦ τόπου A + B (τοῦ σχ. 7) νὰ ἔχωσι τὰς εἰκόνας αὐτῶν ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας $(+1,\ i,\ -1)$, τοῦ ἐπιπέδου ζ (σχ. 8).

Ἂν ἀπεικονίσωμεν ὅθεν τὰ 3 σημεῖα P_1, P_2 καὶ ∞ κατάντι τοῦ ὑγροῦ νήματος B, διαδοχικῶς εἰς τὰ σημεῖα -1, $+1$ καὶ 0 κείμενα ἐπὶ τῆς διαμέτρου $(-1, +1)$ τοῦ ἡμικύκλου $|\zeta| = 1,\ \eta \geq 0$, αἱ ἐλεύθεροι γραμμαὶ λ_1 καὶ λ_2 θὰ ἔχωσι τὰς εἰκόνας αὐτῶν ἐπὶ τῶν ἀκτίνων $(0, -1)$ καὶ $(0, +1)$.

Ὅσον ἀφορᾷ τὰς παρειὰς $\mu_1 + \omega_1$ καὶ $\mu_2 + \omega_2$ προτίθεμαι νὰ τοποθετήσω τὰς εἰκόνας αὐτῶν ἐπὶ τῆς ἡμι-περιφερείας $(-1,\ i,\ +1)$ καὶ ἀκριβέστερον κατὰ τρόπον ὥστε ἡ παρειὰ ω_1 νὰ ἀπεικονισθῇ ἐπὶ τοῦ τόξου $(-1,\ M'_1)$, ἡ μ_1 ἐπὶ τοῦ τόξου $(M'_1,\ j)$, ὁμοίως ἡ ω_2 ἐπὶ τοῦ τόξου $(+1,\ M'_2)$ καὶ τέλος ἡ μ_2 ἐπὶ τοῦ τόξου $(M'_2,\ j)$. Ἐν ἄλλαις λέξεσι τὸ σημεῖον j εἶναι ἡ εἰκὼν τοῦ εἰς τὸ ἄπειρον σημείου συναντήσεως τῶν γραμμῶν μ_1 καὶ μ_2 ἐν τῷ ἐπιπέδῳ $z = x + iy$. Διὰ λόγους συμμετρίας τοῦ τόπου $A + B$ εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ σημεῖον j συμπίπτει ἐνταῦθα μὲ τὸ σημεῖον $+i$, ὥστε ἐν τέλει ἡ παρειὰ $\omega_1 + \mu_1$ θὰ ἔχῃ τὴν εἰκόνα αὐτῆς



Σχ. 8.

ἐπὶ τοῦ τόξου $(-1,\ +i)$ καὶ ἡ παρειὰ $\omega_2 + \mu_2$ ἐπὶ τοῦ τόξου $(+1,\ +i)$.

Ἂν μεταφέρωμεν ἤδη τὰς ἀναλυτικὰς συνθήκας, ἃς δέον νὰ ἱκανοποιῇ ἡ συνάρτησις $f = \varphi + i\psi$ ἐν τῷ πεδίῳ $A + B$ τοῦ ἐπιπέδου z, εἰς τὸν ἡμίκυκλον τοῦ ἐπιπέδου ζ, ἡ συνάρτησις f θεωρουμένη ὡς συνάρτησις τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς ζ ἐν τῷ ἡμι-κύκλῳ (σχ. 8) ὀφείλει νὰ εἶναι ὁμαλὴ ἐν τῷ ἐσωτερικῷ τοῦ κύκλου τούτου, νὰ ἀπειρίζεται εἰς τὰ σημεῖα $\zeta = o$ καὶ $\zeta = i$ καὶ κατὰ τρόπον πλέον συγκεκριμμένον: τὸ πραγματικὸν μέρος αὐτῆς φ δέον νὰ τείνῃ πρὸς τὸ $-\infty$ διὰ $\zeta = 0$ καὶ πρὸς τὸ $+\infty$ διὰ $\zeta = +i$. Ἐξ ἄλλου ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας, ἡ συνάρτησις ψ (συντελεστὴς τοῦ i) δέον καθ᾽ ἃ ἔχει ἐκτεθῇ, νὰ λαμβάνῃ τὰς ἑξῆς τιμάς:

$\psi = o$ ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος $(0, +1)$ καὶ ἐπὶ τοῦ τόξου $(+1, i)$ $\Big\{$ Γραμμὴ $\lambda_2 + \omega_2 + \mu_2 \Big\}$

$\psi = q$ » » » $(0, -1)$ » » » » $(-1, i)$ $\Big\{$ » $\lambda_1 + \omega_1 + _1 \Big\}$

Αἱ συνθῆκαι αὗται θὰ ἐπιτρέψωσι — ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω — τὸν προσδιορισμὸν τῆς συναρτήσεως f (ζ) κατὰ προσέγγισιν προσθετέας πραγματικῆς σταθερᾶς.

Τέλος ἂς μεταφέρωμεν τὰς συνθήκας τῆς συναρτήσεως ω εἰς τὸν ἡμίκυκλον. Ἡ συνάρτησις ω θεωρουμένη ὡς συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς ζ ἐν τῷ ἡμικύκλῳ ὀφείλει: νὰ εἶναι πραγματικὴ ἐπὶ τῆς διαμέτρου $(-1, +1)$, ὁμαλὴ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ἡμικύκλου, νὰ μηδενίζεται διὰ $\zeta = o$ (ὅπερ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον $z = +\infty + iy$) καὶ τέλος τὸ πραγματικὸν μέρος αὐτῆς θ δέον νὰ λαμβάνῃ ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας $(-1, i, +1)$ ἐφ' ἧς ἐτοποθετήθησαν αἱ εἰκόνες τῶν στερεῶν παρειῶν $\omega_1 + \mu_1$ καὶ $\omega_2 + \mu_2$, τιμὰς δοθείσας ἐκ τῶν προτέρων. Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν αἱ στερεαὶ παρειαὶ μ_1 καὶ μ_2 εἶναι εὐθύγραμμοι καὶ παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα ox, ἡ θ θὰ λάβῃ τὴν τιμὴν 0 εἰς τὰ ἀντίστοιχα τόξα τῆς ἡμιπεριφερείας.

8. *Προσδιορισμὸς τοῦ μιγαδικοῦ δυναμικοῦ f ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ζ.*

Πρὸς κατασκευὴν τῆς συναρτήσεως $f(\zeta)$ τῆς ἱκανοποιούσης τὰς ἄνω ἐκτεθείσας συνθήκας ἀναχωρῶ ἀπὸ τὴν συνάρτησιν:

$$(1) \qquad \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$$

ἥτις πληροῖ προφανῶς τὰς δύο συνθήκας: διατηρεῖται ὁμαλὴ ἐν τῷ ἡμικύκλῳ καὶ ἀπειρίζεται διὰ $\zeta = 0$.

Ἐπὶ τῆς ἡμι-περιφερείας $(-1, i, +1)$ ἔχω: $\zeta = e^{i\sigma}$ ἔνθα $\sigma =$ τὸ ἀντίστοιχον ὅρισμα ἀπὸ 0 μέχρι π. (βλ. σχ. 8). Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ συνάρτησις (1) ταυτίζεται μὲ τήν:

$$\frac{1}{2}\left(e^{i\sigma} + e^{-i\sigma}\right) = \cos\sigma$$

ἥτις εἶναι θετικὴ ἐπὶ τοῦ τόξου $(1, i)$ δηλ. διὰ $o \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2}$ καὶ ἀρνητικὴ ἐπὶ τοῦ τόξου $(+i, -1)$ δηλ. διὰ $\frac{\pi}{2} < \sigma \leq \pi$.

Σημειώνω ὅτι ἡ συνάρτησις (1) λαμβάνει τιμὰς πραγματικὰς καὶ θετικὰς διὰ ζ πραγματικὸν καὶ περιλαμβανόμενον μεταξὺ 0 καὶ 1, καὶ τιμὰς πραγματικὰς καὶ ἀρνητικὰς διὰ ζ πραγματικὸν περιλαμβανόμενον μεταξὺ 0 καὶ -1. Θεωρῶ ἤδη τὴν συνάρτησιν:

$$(2) \qquad \operatorname{Log}\left[\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right]$$

ἡ ὁποία εἶναι πραγματικὴ ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος $(0, +1)$ καὶ ἐπὶ τοῦ τόξου $(+1, i)$ καὶ ἐν τῇ ὁποίᾳ ὁ συντελεστὴς τοῦ i λαμβάνει τὴν τιμὴν π ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος (0, — 1) καὶ ἐπὶ τοῦ τόξου (— 1, i). Ἡ συνάρτησις (2) εἶναι ἐπὶ πλέον ὁμαλὴ ἐν τῷ ἡμι-κύκλῳ καὶ ἀπειρίζεται διὰ $\zeta = 0$ καὶ $\zeta = i$. Ἡ συνάρτη- (2) πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ $\frac{q}{\pi}$ ἱκανοποιεῖ ὅθεν ὅλας τὰς ἐκτεθείσας συνθήκας. Τέλος ἡ ζητουμένη συνάρτησις $f(\zeta)$ ὀφείλει διὰ $\zeta = 1$, (εἰκὼν τοῦ σημείου P_2) νὰ ἔχῃ τὸ φανταστικὸν αὐτῆς μέρος ψ ἴσον πρὸς q, ἀναγνωρίζω ὅθεν εὐχερῶς ὅτι ἡ ζητουμένη συνάρτησις $f(\zeta)$ εἶναι :

$$\text{(I)} \qquad f(\zeta) = iq + \frac{q}{\pi} \operatorname{Log.} \left[\frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \right]$$

Τοιουτοτρόπως τὸ μιγαδικὸν δυναμικὸν $f(\zeta) = \varphi(\zeta) + i\,\psi(\zeta)$ εἶναι γνωστὸν ἀλλὰ μόνον ἐν τῷ βοηθητικῷ μιγαδικῷ ἐπιπέδῳ ζ καὶ ὄχι εἰς τὸ πραγματικὸν πεδίον ροῆς z. Ἡ σχέσις I γράφεται (λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι $\zeta = \varrho . e^{i\sigma}$) :

$$f(\zeta) = iq + \frac{q}{\pi} \operatorname{Log.} \frac{1}{2} \left[\left(\varrho + \frac{1}{\varrho} \right) \cos\sigma + i \left(\varrho - \frac{1}{\varrho} \right) \sin\sigma \right]$$

ἢ ἀκόμη, κατόπιν ἁπλῶν μετασχηματισμῶν :

$$f(\zeta) = iq + \frac{q}{\pi} \operatorname{Log.} \frac{1}{2} \sqrt{\varrho^2 + \frac{1}{\varrho^2} + 2\cos 2\sigma} + \frac{iq}{\pi} \operatorname{arc.\,tg.} \left[\frac{\varrho^2 - 1}{\varrho^2 + 1} \operatorname{tg}\sigma \right]$$

ἔνθα ἐλήφθη ὁ προσδιορισμὸς k τοῦ λογαρίθμου $= 0$.
Χωρίζοντες τὸ πραγματικὸν μέρος ἀπὸ τὸ φανταστικόν, λαμβάνομεν :

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \varphi(\zeta) = \dfrac{q}{\pi} \operatorname{Log.} \dfrac{1}{2} \sqrt{\varrho^2 + \dfrac{1}{\varrho^2} + 2\cos 2\sigma} \\[2ex] \psi(\zeta) = q \left\{ 1 + \dfrac{1}{\pi} \operatorname{arc.\,tg} \left[\dfrac{\varrho^2 - 1}{\varrho^2 + 1} \operatorname{tg}\sigma \right] \right\} \end{cases}$$

Αἱ σχέσεις II δίδουσι τὸ μιγαδικὸν τῶν ταχυτήτων φ καὶ τὴν συνάρτησιν τοῦ ῥεύματος ψ, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ζ. Ἐπαληθεύεται εὐχερῶς ὅτι ἐπὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς ῥεύματος ἡ συνάρτησις φ λαμβάνει ὅλας τὰς τιμὰς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$ καὶ ὅτι ἡ $\psi(\zeta)$ διατηρεῖ σταθερὰν τιμὴν ἐφ' ἑκάστης γραμμῆς ῥεύματος. Εἰδικῶς ἐπὶ τῆς παρειᾶς $\mu_1 + \varpi_1$ ἔχομεν $\psi = q$, καὶ ἐπὶ τῆς παρειᾶς $\mu_2 + \varpi_2$ ἔχομεν : $\psi = 0$.

Ἄς ἀναζητήσωμεν τὰς ἐξισώσεις τῶν εἰκόνων τῶν γραμμῶν ῥεύματος ὡς καὶ τῶν γραμμῶν ἴσου δυναμικοῦ, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ζ.

Αἱ γραμμαὶ ἴσου δυναμικοῦ ἔχουν ὡς ἐξίσωσιν, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ζ:

$$\varphi\,(\zeta) = \Sigma\tau\alpha\vartheta\varepsilon\varrho\grave{\alpha} = C = \mu \qquad \text{ἔνθα} \quad \mu = -\infty \ldots\ldots + \infty$$

δηλαδή:

$$\frac{q}{\pi}\,\mathrm{Log.}\,\frac{1}{2}\,\sqrt{\varrho^2 + \frac{1}{\varrho^2} + 2.\cos 2\sigma} = \mu$$

ἥτις γράφεται:

$$(3) \qquad \varrho^2 + \frac{1}{\varrho^2} + 2.\cos 2\sigma = 4.\, e^{\frac{2\mu\pi}{q}}$$

Ἀλλ' ὡς γνωστόν, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ζ ἔχομεν: $\varrho = \mu\acute{\varepsilon}\tau\varrho o\nu = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$

καὶ $\cos 2\sigma = \cos^2\sigma - \sin^2\sigma = \dfrac{\xi^2}{\xi^2 + \eta^2} - \dfrac{\eta^2}{\xi^2 + \eta^2} = \dfrac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 + \eta^2}$

Ὁπότε ἡ ἐξίσωσις (3) κατόπιν ἀντικαταστάσεως καὶ ἁπλοποιήσεων γράφεται:

$$(\mathrm{III}) \qquad (\xi^2 + \eta^2)^2 + 2\,(\xi^2 - \eta^2) + 1 = 4.\,(\xi^2 + \eta^2)\, e^{\frac{2\mu\pi}{q}}$$

Ἡ σχέσις III εἶναι ἡ ἐξίσωσις εἰς Καρτεσιανὰς συντεταγμένας ξ καὶ η ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ζ, τῶν καμπύλων - εἰκόνων τῶν γραμμῶν ἴσου δυναμικοῦ.

Αἱ γραμμαὶ ῥεύματος ἔχουν ὡς ἐξίσωσιν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ζ:

$$\psi\,(\zeta) = \Sigma\tau\alpha\vartheta\varepsilon\varrho\grave{\alpha} = k \qquad \text{ἔνθα} \quad k = 0,\ldots\ldots\ldots q$$

δηλαδή:

$$q\left\{1 + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arc.\,tg.}\left[\frac{\varrho^2 - 1}{\varrho^2 + 1}\cdot \mathrm{tg}\sigma\right]\right\} = k$$

ἥτις γράφεται:

$$\mathrm{arc.\,tg.}\left[\frac{\varrho^2 - 1}{\varrho^2 + 1}\cdot \mathrm{tg}\sigma\right] = \frac{\pi\,(k - q)}{q}$$

ἢ ἀκόμη:

$$(4) \qquad \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho^2 + 1}\cdot \mathrm{tg}\sigma = \mathrm{tg}\,\frac{\pi\,(k - q)}{q} = \lambda \qquad \text{ἔνθα} \quad \lambda = 0,\ldots\ldots - \infty$$

᾿Αντικαθιστῶντες εἰς τὴν σχέσιν (4) τὸ ρ διὰ τῆς τιμῆς του $\sqrt{\xi^2+\eta^2}$ καὶ tgσ διὰ $\frac{\eta}{\xi}$, λαμβάνομεν:

$$\frac{\eta\,(\xi^2+\eta^2-1)}{\xi\,(\xi^2+\eta^2+1)} = \mathrm{tg}\,\frac{\pi\,(k-q)}{q}$$

ἤτοι τελικῶς:

$$\text{(IV)} \qquad \eta\,(\xi^2+\eta^2-1) = \lambda.\,\xi\,(\xi^2+\eta^2+1)$$

῾Η σχέσις (IV) εἶναι ἡ ἐξίσωσις εἰς Καρτεσιανὰς συντεταγμένας ξ καὶ η ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ζ, τῶν καμπύλων — εἰκόνων τῶν γραμμῶν ρεύματος ἢ τροχιῶν τῶν ρευστῶν στοιχείων.

῾Υπονοεῖται ὅτι τόσον εἰς τὴν ἐξίσωσιν (III) ὅσον καὶ εἰς τὴν (IV) δέον νὰ ληφθῶσι τὰ τμήματα τῶν καμπύλων τούτων τὰ περιλαμβανόμενα ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ ἡμι-κύκλου $|\zeta| = 1$, $\eta \geq 0$.—

Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς ἐ π ὶ τ ῆ ς ω(ζ). ῾Η συνάρτησις ω(ζ) θεωρουμένη ἐν τῷ ἡμικύκλῳ ὀφείλει: νὰ εἶναι πραγματικὴ ἐπὶ τῆς διαμέτρου (—1, + 1), ὁμαλὴ εἰς τὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα τοῦ ἡμικύκλου, νὰ μηδενίζεται διὰ ζ= ο καὶ τέλος ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας (—1, i, + 1) τὸ πραγματικὸν αὐτῆς μέρος ϑ δέον νὰ εἶναι συνάρτησις πεπερασμένη καὶ συνεχὴς (ἐξαιρέσει ἐνδεχομένως εἰς πεπερασμένον πλῆθος σημείων). Δοθέντος δὲ ὅτι: $w = e^{-i\omega}$, αἱ συνθῆκαι (α) τοῦ ἀρ. 6 ἂς ὑπενθυμίζομεν:

$$\text{(α)} \quad \begin{cases} w = V_\infty\, e^{-i\omega} = V_\infty & \text{εἰς τὸ ἐπ' } \infty \text{ ἀνάντι} \\ w = 1 & \text{» » » » κατάντι} \end{cases}$$

ἐπιβάλλουσι προφανῶς:

$$\text{(α)} \quad \begin{cases} \omega(j) = \omega(i) = 0 + i\,\mathrm{Log}.V_\infty \\ \omega(0) = 0 \end{cases}$$

῾Η συνάρτησις ω(ζ) εἶναι πραγματικὴ ἐπὶ τῆς διαμέτρου (— 1, + 1), συνεπῶς δ ύ ν α τ α ι κατὰ τὴν ᾿Αρχὴν τοῦ Schwartz, ν ὰ ἐ π ε κ τ α θ ῇ ἀ ν α λ υ τ ι κ ῶ ς ἐν τῷ ἡμικύκλῳ $|\zeta| = 1$, $\eta \leq 0$, διὰ συμμετρικῆς προεκτάσεως τοῦ θεωρουμένου ἡμικύκλου (σχ. 8) ἐν σχέσει πρὸς τὸν ἄξονα 0ξ. Δυνάμεθα ὅθεν νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις ω(ζ) εἶναι πραγματικὴ ἐπὶ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος καὶ ὁμαλὴ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ὁ λ ο κ λ ή ρ ο υ τ ο ῦ κ ύ-κ λ ο υ $|\zeta| < 1$ καὶ ὅτι διατηρεῖται πεπερασμένη καὶ συνεχὴς ἐπὶ τῆς περιφερείας $|\zeta| = 1$ (ἐξαιρέσει ἐνδεχομένως εἰς πεπερασμένον πλῆθος σημείων).

Στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων θὰ κατορθώσωμεν εὐκόλως νὰ προβῶμεν εἰς τὸν πραγματικὸν προσδιορισμὸν τῆς συναρτήσεως ταύτης ω(ζ) ὅταν δοθῇ ἡ συγκεκριμμένη μορφὴ τοῦ στερεοῦ ἐμποδίου (βλ. ἀρ. 14).

9. Γενικὴ λύσις. Ἐξ ὑποθέσεως τὸ ῥευστὸν κινεῖται ἐντὸς τῆς διώρυγος ἐπιπέδως μονίμως καὶ ἀστροβίλως. Δυνάμεθα ὅθεν νὰ ἐφαρμόσωμεν εἰς αὐτὸ τὴν γνωστὴν θεμελιώδη ἐξίσωσιν τῆς Ἐπιπέδου Ὑδροδυναμικῆς [1] :

$$\text{(1)} \qquad w = \frac{df}{dz} = e^{-i\omega}$$

ὁπόθεν :

$$dz = e^{i\omega}\, df$$

Παραγωγίζοντες ὡς πρὸς ζ τὴν σχέσιν I τοῦ ἀριθ. 8, ἔχομεν :

$$df = \frac{q}{\pi}\,\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1}\,\frac{d\zeta}{\zeta}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) λαμβάνομεν :

$$\text{(2)} \qquad dz = \frac{q}{\pi}\, e^{i\omega}\, \frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1}\,\frac{d\zeta}{\zeta}$$

Ἐὰν καλέσωμεν $z_1 = x_1 + i\,y_1$ τὴν μιγαδικὴν συντεταγμένην τοῦ σημείου P_1 (σχ. 7), ἔχοντος ὡς εἰκόνα εἰς τὸ ἐπίπεδον ζ τὸ σημεῖον $\zeta = -1$ καὶ ἐὰν ὁλοκληρώσωμεν τὴν σχέσιν (2), λαμβάνομεν :

$$\text{(V)} \qquad z - z_1 = \frac{q}{\pi}\int_{-1}^{\zeta} e^{i\omega}\, \frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1}\,\frac{d\zeta}{\zeta}$$

Εὐθὺς ὡς γνωσθῇ ἡ συνάρτησις ω τῆς μεταβλητῆς ζ, ἡ σχέσις (V) θὰ ἐκφράζῃ — κατὰ τὰ γνωστὰ — τὴν σύμμορφον καὶ κατὰ τρόπον διπλῶς μονότιμον ἀπεικόνισιν μεταξὺ τοῦ πεδίου ῥοῆς A+B τοῦ ἐπιπέδου z καὶ τοῦ ἡμικύκλου $|\zeta| < 1$, $\eta \geq 0$ τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου $\zeta = \xi + i\eta$.

[1] Βλ. Idr. Piana U. Cisotti, σελ. 61.

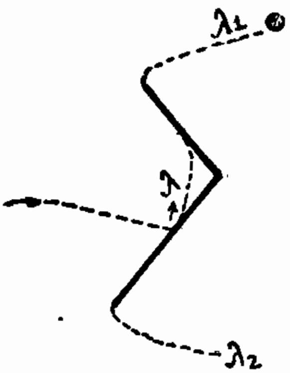
Ἀλλ' ἡ σχέσις (V) προέκυψε διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς θεμελιώδους ἐξισώσεως τῆς Ἐπιπέδου Ὑδροδυναμικῆς, λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν γενικῶν συνθηκῶν τοῦ προβλήματος. Δυνάμεθα ὅθεν νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ σχέσις (V) ἀποτελεῖ τὴν γενικὴν λύσιν τῆς ἐπιπέδου μονίμου καὶ ἀστροβίλου ῥύσεως ἑνὸς τελείου καὶ ἀσυμπιέστου ῥευστοῦ ἐντὸς διώρυγος ἐχούσης τὴν μορφὴν τοῦ σχ. 6, διότι ὡς θὰ διαπιστωθῇ ἐν τοῖς κατωτέρω, χάρις εἰς αὐτὴν θὰ καταστῇ ἐφικτὸς ὁ ὑπολογισμὸς ὅλων τῶν χαρακτηριστικῶν στοιχείων τῆς κινήσεως ἐν τῇ ὑπὸ μελέτην περιπτώσει.

Ἡ γενικὴ λύσις (V) εἶναι αὐθαίρετος εἰς οἷον βαθμὸν καὶ ἡ συνάρτησις $\omega(\zeta)$. Ἐν ἄλλαις λέξεσιν εἰς πᾶσαν συνάρτησιν $\omega(\zeta)$ ὁμαλὴν ἐν τῷ κύκλῳ $|\zeta| \leq 1$, πραγματικὴν ἐπὶ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος, ἀντιστοιχεῖ μιὰ κίνησις ἀναλυτικῶς δυνατή.[1]

Παρατηροῦμεν τέλος ὅτι ἡ σχέσις (V) ἐκφράζουσα τὴν σύμμορφον καὶ κατὰ τρόπον διπλῶς μονότιμον ἀπεικόνισιν μεταξὺ τοῦ πεδίου $A + B$ καὶ τοῦ ἡμικύκλου, εἶναι συνάρτησις τῆς κινητικῆς καταστάσεως τοῦ ῥευστοῦ.

---

[1] Ὁ καθηγ. κ. H. Villat ἐνεβάθυνε εἰς τὸ ζήτημα τῆς πολλαπλότητος τῶν παραδεκτῶν λύσεων διὰ τὸ αὐτὸ ἐμπόδιον καὶ ἔθεσεν εἰς φῶς τὴν ἐν λόγῳ ἀπειρίαν λύσεων ἐπὶ ἁπλοῦ παραδείγματος: ῥεύματος ἀπεριορίστως ἐκτεινομένου μὲ ἐμπόδιον συγκείμενον ἐκ δύο λεπτῶν εὐθυγράμμων παρειῶν σχηματιζουσῶν κοιλότητα πρὸς τὸ ῥεῦμα.



Ἀναλόγως τῆς τοποθετήσεως τοῦ νεκροῦ σημείου O καὶ τοῦ σχηματισμοῦ ἢ ὄχι τῆς γραμμῆς λ, προκύπτουσι διάφοροι ἀπροσδιοριστίαι. (Βλ. «Leçons sur l'Hydrodynamique» de H. Villat, 1929, page 97, ὡς ἐπίσης «Aperçus théoriques sur la Résistance des Fluides» τοῦ ἰδίου, σελ. 93 - 101).

Ἐκ τῶν ἄνω μελετῶν τοῦ κ. H. Villat προκύπτει ὅτι διὰ τινας διατάξεις ἔστω καὶ ἁπλουστάτας, ὑπάρχει ἀπειρία λύσεων δυναμένων να γίνωσι δεκταί. Τὸ νὰ γνωρίζῃ τις συνεπῶς, ποία ἐξ ὅλων τῶν λύσεων τούτων, ἁπασῶν παραδεκτῶν διὰ τὸ αὐτὸ ἐμπόδιον, εἶναι ἡ χαλλιτέρα ἀπὸ φυσικῆς ἀπόψεως εἶναι ζήτημα λεπτότατον. Τὴν σήμερον τὸ ζήτημα τοῦτο εἶναι ἁπλῶς τεθειμένον ἐν τῇ Ὑδροδυναμικῇ καὶ ὄχι λελυμένον. Ἀπόψεις εὐσταθείας ἐσωτερικῆς καὶ ἐξώδους θὰ ἐπιτρέψωσιν ἀναμφιβόλως — κατὰ Villat — τὴν πλήρη διαλεύκανσιν τοῦ προβλήματος τούτου τῆς Φυσικῆς.

ΜΕΡΟΣ III

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΕΩΣ

10. *Έκφρασις στερεῶν παρειῶν.* Ἵνα ἡ μεταβλητὴ z γράφῃ τὰς στερεὰς παρειὰς ἀρκεῖ ἡ ζ νὰ διαγράφῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν $(-1, i, +1)$ ἢ ἀκριβέστερον: ὅταν ἡ ζ κινεῖται ἀπὸ -1 μέχρι $+i$ (βλ. σχ. 8), ἡ z γράφει τὴν παρειὰν $\varpi_1 + \mu_1$ ἀπὸ τοῦ σημείου P_1 μέχρι τοῦ σημείου ἐπ' ∞ ἀνάντι. Ὁμοίως ὅταν ἡ ζ γράφει τὸ τόξον $(-1, +i)$ τὸ σημεῖον z γράφει τὴν παρειὰν $\varpi_2 + \mu_2$ ἀπὸ τοῦ σημείου P_2 μέχρι τοῦ σημείου ἐπ' ∞ ἀνάντι.
Ἐπὶ τῆς περιφερείας ἔχομεν: $\zeta = e^{i\sigma}$ μὲ $0 \leq \sigma \leq \pi$
Συνεπῶς ἡ σχέσις (V) γράφεται:

$$(1) \qquad z - z_1 = \frac{q}{\pi}\int_{\pi}^{\sigma} e^{i\omega}\frac{2\ i \sin\sigma}{2\ \cos\sigma}\ \frac{i\, e^{i\sigma}\, d\sigma}{e^{i\sigma}} = -\frac{q}{\pi}\int_{\pi}^{\sigma} e^{i\omega}\ tg\sigma\ d\sigma$$

Ἐὰν εἰς τὴν σχέσιν (1) θέσωμεν:

$$\omega = \vartheta + i\tau$$
$$z_1 = x_1 + i\, y_1$$
$$z = x + i\, y$$

καὶ ἐὰν χωρίσωμεν τὸ πραγματικὸν μέρος ἀπὸ τὸ φανταστικόν, λαμβάνομεν:

$$(VI) \qquad \begin{aligned} x &= x_1 - \frac{q}{\pi}\int_{\pi}^{\sigma} e^{-\tau}\, tg\sigma\ \cos\vartheta\ d\sigma \\ y &= y_1 - \frac{q}{\pi}\int_{\pi}^{\sigma} e^{-\tau}\, tg\sigma\ \sin\vartheta\ d\sigma \end{aligned}$$

Αἱ σχέσεις (VI) διὰ $\frac{\pi}{2} \leq \sigma \leq \pi$ εἶναι αἱ παραμετρικαὶ ἐξισώσεις τῆς $\varpi_1 + \mu_1$

» $0 \geq \sigma \geq \frac{\pi}{2}$ » » » » » $\varpi_1 + \mu_2$

Τὸ στοιχειῶδες τόξον τῆς παρειᾶς τοῦ ἐμποδίου εἶναι:

$$(2) \qquad d\varpi = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{q}{\pi} e^{-\tau} \operatorname{tg}\sigma \, d\sigma$$

καὶ ἡ καμπυλότης K τῆς παρειᾶς τοῦ ἐμποδίου θὰ εἶναι:

$$K = \frac{1}{r} = \frac{d\vartheta}{d\varpi} = \frac{\pi}{q} e^{-\tau} \operatorname{cotg}\sigma \frac{d\vartheta}{|d\sigma|}$$

Ὁλοκληροῦντες τὴν σχέσιν (2) εὑρίσκομεν:

$$(\text{VIIa}) \qquad \begin{aligned} \varpi_1 &= \frac{q}{\pi} \int_{\sigma=\pi}^{\sigma=\sigma} e^{-\tau} \operatorname{tg}\sigma \, d\sigma \qquad && (\sigma_1 \leq \sigma \leq \pi) \\ \varpi_2 &= \frac{q}{\pi} \int_{\sigma=\sigma}^{\sigma=0} e^{-\tau} \operatorname{tg}\sigma \, d\sigma \qquad && (0 \leq \sigma \leq \pi - \sigma_1) \end{aligned}$$

Αἱ σχέσεις VIIa ἐκφράζουσι τὰ μήκη τῶν τόξων τῶν ἐμποδίων ϖ_1 καὶ ϖ_2, τῶν περιλαμβανομένων μεταξὺ σημείων P_1 ἢ P_2 καὶ τυχόντος σημείου τῆς ϖ_1 ἢ ϖ_2.

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν τοὺς τύπους:

$$(\text{VIIb}) \qquad \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{q}{\pi} \int_{\sigma=\sigma_1}^{\sigma=\sigma} e^{-\tau} \operatorname{tg}\sigma \, d\sigma \qquad && \left(\sigma_1 \geq \sigma \geq \frac{\pi}{2}\right) \\ \mu_2 &= \frac{q}{\pi} \int_{\sigma=\pi-\sigma_1}^{\sigma=\sigma} e^{-\tau} \operatorname{tg}\sigma \, d\sigma \qquad && \left(\pi - \sigma_1 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

οἵτινες δίδουσι τὰ μήκη τῶν τόξων τῶν στερεῶν παρειῶν τῆς διώρυγος μ_1 καὶ μ_2, τῶν περιλαμβανομένων μεταξὺ τῶν σημείων M_1 ἢ M_2 καὶ τυχόντος σημείου.

Εἰς τοὺς τύπους (VIIa) καὶ (VIIb), σ_1 εἶναι τὸ ὄρισμα τοῦ σημείου M' εἰκόνος τοῦ σημείου M τοῦ σχ. 7. Θὰ ἴδωμεν ὀλίγον κατωτέρω τὴν σημασίαν καὶ τὸν ῥόλον αὐτοῦ.

Εἰς τὸ κεφάλαιον τῆς Ἀντιστάσεως θὰ δοθῇ ἀναλυτικὸς ὑπολογισμὸς τῶν μηκῶν ω_1 ἢ ω_2 .

11. Ἔκφρασις τῶν ἐλευθέρων γραμμῶν λ_1 καὶ λ_2. Ὅταν ἡ ζ γράφῃ τὴν διάμετρον (— 1, + 1), ἡ μεταβλητὴ z διατρέχει τὰς ἐλευθέρας γραμμὰς λ_1 καὶ λ_2 ἢ ἀκριβέστερον, ὅταν ἡ ζ μεταβάλλεται ἀπὸ — 1 μέχρι 0, ἡ z γράφει τὴν γραμμὴν λ_1 ἀπὸ τοῦ σημείου P_1 μέχρι τοῦ ἐπ' ∞ ἀνάντι καὶ ὅταν ἡ ζ διατρέχῃ τὴν ἀκτῖνα (1, 0) ἡ z γράφει τὴν γραμμὴν λ_2 ἀπὸ τοῦ σημείου P_2 μέχρι τοῦ ἐπ' ∞ κατάντι

Ὑπενθυμίζοντες ὅτι z_1 εἶναι ἡ μιγαδικὴ συντεταγμένη τοῦ σημείου P_1, ἐὰν z εἶναι τυχὸν σημεῖον, ἐκ τοῦ τύπου (V) λαμβάνομεν:

$$z = z_1 + \frac{q}{\pi}\int_{-1}^{\zeta} e^{i\omega}\,\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1}\,\frac{d\zeta}{\zeta}$$

διὰ ζ πραγματικὸν καὶ περιλαμβανόμενον μεταξὺ 0 καὶ 1. Χωρίζοντες τὸ πραγματικὸν μέρος ἀπὸ τὸ φανταστικὸν τοιοῦτον καὶ λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ ω διατηρεῖται πραγματικὴ διὰ ζ πραγματικόν, ἔχομεν :

$$\text{(VIIIa)}\quad \begin{aligned} x &= x_1 + \frac{q}{\pi}\int_{-1}^{\zeta}\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1}\,\cos\omega\,\frac{d\zeta}{\zeta} \\ y &= y_1 + \frac{q}{\pi}\int_{-1}^{\zeta}\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1}\,\sin\omega\,\frac{d\zeta}{\zeta} \end{aligned}$$

διὰ ζ πραγματικὸν καὶ περιλαμβανόμενον μεταξὺ 0 καὶ 1.

Αἱ σχέσεις (VIIIa) εἶναι αἱ παραμετρικαὶ ἐξισώσεις τῆς ἐλευθέρας γραμμῆς λ_1. Ἐντελῶς ἀναλόγως καλοῦντες $z_2 = x_2 + iy_2$ τὸ σημεῖον P_2, εὑρίσκομεν :

$$\text{(VIIIb)}\quad \begin{aligned} x &= x_2 + \frac{q}{\pi}\int_{+1}^{\zeta}\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1}\,\cos\omega\,\frac{d\zeta}{\zeta} \\ y &= y_2 + \frac{q}{\pi}\int_{+1}^{\zeta}\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1}\,\sin\omega\,\frac{d\zeta}{\zeta} \end{aligned}$$

δια ζ πραγματικὸν καὶ περιλαμβανόμενον μεταξὺ 0 καὶ + 1, Αἱ σχέσεις (VIIIb) εἶναι αἱ παραμετρικαὶ ἐξισώσεις τῆς ἐλευθέρας γραμμῆς λ_2.

Τὸ στοιχειῶδες τόξον $d\lambda_1$ εἶναι:

$$(1) \qquad d\lambda_1 = \sqrt{dx^2 + dy^2} = |dz| = |e^{i\omega}|\,|df| = |df| = |d\varphi|$$

καὶ ἡ καμπυλότης:

$$K = \frac{1}{r} = \frac{d\vartheta}{d\lambda_1} = \frac{d\vartheta}{|df|} = \frac{\pi}{q}\,\zeta\,\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - 1}\,\frac{d\vartheta}{d\zeta}$$

Ὅταν ἡ ζ διατρέχῃ τὴν ἐλευθέραν γραμμὴν λ_1 ἀπὸ τοῦ σημείου P_1 πρὸς τὸ ἐπ' ∞ κατάντι, ἡ ζ γράφει τὸν πραγματικὸν ἄξονα ἀπὸ τοῦ σημείου -1 μέχρι τῆς ἀρχῆς $\zeta = 0$, καὶ ἡ συνάρτησις φ δηλ. τὸ πραγματικὸν μέρος τῆς f αὐξάνει διαρκῶς ἀπὸ τῆς τιμῆς $\varphi_1 = \frac{q}{\pi}$ Log. $1 = 0$, μέχρι τῆς τιμῆς ∞. Κατὰ συνέπειαν ὁλοκληροῦντες τὴν σχέσιν (1) ἔχομεν:

$$\lambda_1 = \varphi - \varphi_1 = f - f_1 = \frac{q}{\pi}\,\mathrm{Log.}\left[\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right] \qquad (-1 \leq \zeta \leq 0)$$

(2)

Ὁμοίως $$\lambda_2 = \varphi - \varphi_2 = f - f_2 = \frac{q}{\pi}\,\mathrm{Log.}\left[\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right] \qquad (0 \leq \zeta \leq 1)$$

Αἱ σχέσεις (2) δίδουν τὰ μήκη λ_1 καὶ λ_2 τῶν τόξων τῶν περιλαμβανομένων μεταξὺ P_1 ἢ P_2 καὶ τυχόντος σημείου.

12. Ταχύτητες. Ἡ γνωστὴ σχέσις:

$$w = e^{i\omega}$$

προσδιορίζει τὴν μιγαδικὴν ταχύτητα w συναρτήσει τῆς συναρτήσεως ω τοῦ Levi-Civita ($\omega = \vartheta + i\tau$). Εὐθὺς ὡς ἡ συνάρτησις $\omega(\zeta)$ γίνῃ γνωστή, ἡ σχέσις $w = e^{-i\omega}$ θὰ δώσῃ τὴν ταχύτητα εἰς τὸ ἐπίπεδον ζ καὶ διὰ μέσου τῆς γενικῆς λύσεως V τοῦ ἄρ. 9 τῆς ἐκφραζούσης τὴν σύμμορφον καὶ κατὰ τρόπον διπλῶς μονότιμον ἀπεικόνισιν μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων z καὶ ζ, θὰ λάβωμεν τὰς ἀληθεῖς ταχύτητας τῶν ῥευστῶν στοιχείων ἐν τῷ ἐπιπέδῳ κινήσεως z.

13. Διανομὴ τῶν πιέσεων. Ἔστω p ἡ πίεσις τοῦ ὑγροῦ εἰς ἓν τυχὸν σημεῖον τοῦ πεδίου A + B καὶ p_0 ἡ σταθερὰ πίεσις τοῦ ῥευστοῦ εἰς τὴν ἤρεμον καὶ ἀδιατάρακτον ζώνην τοῦ διακένου (C).

Ἡ πίεσις αὕτη p_0 εἶναι ἡ στατικὴ πίεσις τοῦ ὑγροῦ ἐν ἠρεμίᾳ ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ὑδροστατικὸν ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁποίου μελετῶμεν τὴν κίνησιν. Δοθέντος ὅτι ἡ ρύσις εἶναι μόνιμος τὸ θεώρημα τοῦ Bernouilli λαμβάνει τὴν ἑξῆς μορφήν:

Ἐὰν V εἶναι ἡ ταχύτης ἑνὸς τυχόντος σημείου ἔχοντος πίεσιν p, ἡ ταχύτης τοῦ ἐπ' ∞ ἐν τῇ ἠρέμῳ ζώνῃ σημείου ἐν τῇ ὁποίᾳ ἡ πίεσις εἶναι p_0 (σταθερὰ) εἶναι ὡς γνωρίζομεν $V = 1$ (ὑπόθεσις ἰσοδυναμοῦσα πρὸς ἀλλαγὴν τῶν μονάδων) καὶ τὸ θεώρημα τοῦ Bernouilli δίδει:

$$p + \frac{1}{2} V^2 = p_0 + \frac{1}{2} 1^2 = C^{te}$$

ὅπου C = σταθερὰ ἔχουσα τὴν αὐτὴν τιμὴν ἐφ' ὅλων τῶν ὑγρῶν νημάτων, ἐφ' ὅσον ἡ ρύσις εἶναι μόνιμος. Συνεπῶς ἔχομεν:

$$\text{(IX)} \qquad p = p_0 + \frac{1}{2} (1 - V^2)$$

Ὁ τύπος (IX) δίδει τὴν διανομὴν τῶν ταχυτήτων ἐφ' ὁλοκλήρου τοῦ πεδίου τῆς ῥοῆς, ὅταν ἡ ταχύτης V τοῦ ῥευστοῦ στοιχείου εἶναι γνωστὴ (ἀρ. 12). Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ πίεσις τοῦ ῥευστοῦ ἐξαρτᾶται ἀποκλειστικῶς καὶ μόνον ἐκ τῆς κινητικῆς καταστάσεως αὐτοῦ ὡς καὶ τῆς ὑδροστατικῆς σταθερᾶς πιέσεως ἐν τῇ ἠρέμῳ ζώνῃ τοῦ διακένου.

Ὑπενθυμίζω τέλος ὅτι εἴθεσται νὰ καλεῖται δυναμικὴ πίεσις ἡ ποσότης:

$$p' = p - p_0 = \frac{1}{2} (1 - V^2)$$

διὰ τὸν λόγον ὅτι, ὡς εὐκόλως δι' ὑπολογισμοῦ διαπιστοῦται, αὕτη εἶναι ἡ μόνη δύναμις ἥτις γεννᾷ τὴν ὤθησιν ἐπὶ τοῦ στερεοῦ ἐμποδίου, τῆς p_0 ἐχούσης πάντοτε ἐπιρροὴν μηδέν. [1]

14. Πραγματικὸς προσδιορισμὸς τῆς συναρτήσεως ω (ζ). Πρὶν ἢ συνεχίσωμεν τὴν μελέτην μας, παρατηροῦμεν ὅτι εἰς πάντας τοὺς μέχρι τοῦδε ληφθέντας τύπους οἵτινες δίδουσι τὰ στοιχεῖα τῆς κινήσεως εἰσέρχεται ἡ συνάρτησις ω (ζ). Τὸ ὅλον πρόβλημα ἀνάγεται ὅθεν ἐφεξῆς εἰς τὴν κατασκευὴν τῆς θεμελιώδους ταύτης συναρτήσεως.

---

[1] Βλ. Idr. Piana U. Cisotti, σελ. 169.

Πρὸς τοῦτο:

Ὑπενθυμίζω ὅτι ἡ ω ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ζ ὀφείλει νὰ εἶναι πραγματικὴ ἐπὶ τῆς διαμέτρου $(-1, +1)$, ὁμαλὴ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ἡμικύκλου, νὰ μηδενίζεται διὰ $\zeta = 0$ καὶ τέλος ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας $(-1, i, +1)$ τὸ πραγματικὸν μέρος αὐτῆς ϑ (= γωνία τῆς ταχύτητος V μετὰ τοῦ + ox) δέον νὰ λαμβάνῃ μίαν διαδοχὴν τιμῶν δοθεισῶν ἐκ τῶν προτέρων.

Ἀναγνωρίζω εὐχερῶς ὅτι ἡ ω εἶναι μία συνάρτησις λύουσα τὸ πρόβλημα τοῦ Dirichlet ἐν τῷ κύκλῳ. Ἡ συνάρτησις αὕτη δύναται νὰ προσδιορισθῇ διὰ τοῦ κλασσικοῦ τύπου τοῦ Schwartz ὡς οὗτος μετεσχηματίσθη ὑπὸ τοῦ καθηγ. κ. U. Cisotti διὰ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ ἐκ τῶν προτέρων δοθεῖσα διαδοχὴ τιμῶν ἀναφέρεται εἰς σταθερὰς τιμὰς κατὰ τμήματα τόξων περιφερείας. (Βλ. Idromeccanica Piana, de U. Cisotti, σελὶς 19, τύπος IV).[1]

Μέχρι τοῦδε ὑπεθέτομεν ὅτι τὸ στερεὸν ἐμπόδιον εἶχε σχῆμα τυχόν. Ἵνα ὁ προσδιορισμὸς τῆς ω καταστῇ ἐφικτὸς εἶναι ἀπαραίτητον νὰ δοθῇ τὸ σχῆμα τοῦ ἐμποδίου.

Ἂς τοποθετηθῶμεν εἰς τὴν περίπτωσιν ἑνὸς λεπτοῦ — εὐθυγράμμου (lame) ἐμποδίου ὑπὸ τυχοῦσαν γωνίαν α, ἀντιστοιχοῦσαν πρὸς τὴν συνήθη περίπτωσιν τῆς Τεχνικῆς, ἑνὸς προβόλου ἢ τοίχου εὐθυγράμμου προσκεκολλημένου εἰς τὴν ἑτέραν τῶν παρειῶν ἑνὸς ποταμοῦ ἢ μιᾶς διώρυγος. Κατὰ ταῦτα ἡ διώρυξ θὰ ἔχῃ τὴν διάταξιν τοῦ σχ. 9.

Θεωρῶ (σχ. 10) τὴν ἡμιπεριφέρειαν $|\zeta| = 1$, $\eta \geq 0$ τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου $\zeta = \xi + i\eta$, τὴν ὁποίαν διαιρῶ εἰς 4 μέρη διὰ τῶν σημείων:

$$\zeta_0 = e^{i\pi} = -1, \ \zeta_1 = e^{i\sigma_1}, \ \zeta_2 = e^{\frac{i\pi}{2}}, \ \zeta_3 = e^{i(\pi-\sigma_1)} \ \text{καὶ} \ \zeta_4 = e^{io} = 1.$$

Ζητῶ μίαν ἀναλυτικὴν συνάρτησιν πληροῦσαν τὰς ἐκτεθείσας συνθήκας καὶ τῆς ὁποίας τὸ πραγματικὸν μέρος ϑ νὰ λαμβάνῃ τὴν σταθερὰν τιμὴν ϑ_1 ἐπὶ τοῦ τόξου $(-1, \zeta_1)$, τὴν σταθερὰν τιμὴν ϑ_2 ἐπὶ τοῦ τόξου (ζ_1, ζ_2), τὴν σταθερὰν τιμὴν ϑ_3 ἐπὶ τοῦ τόξου (ζ_2, ζ_3), καὶ τέλος τὴν σταθερὰν

---

[1] Ὁ κ. H. Villat ἐπέλυσε τὸ πρόβλημα τοῦ Dirichlet ἐν τῷ κυκλικῷ δακτυλίῳ δώσας τὸν φερώνυμον τύπον διὰ τῶν ἐλλειπτικῶν συναρτήσεων (Βλ. λ.χ. Leçons sur l'Hydrodynamique page 20) τοῦθ' ὅπερ ἐπέτρεψε τὴν μελέτην συνθετοτέρων καὶ πολυπλοκοτέρων περιπτώσεων.

Ὑπενθυμίζω τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος τοῦ Dirichlet. «Νὰ προσδιορισθῇ μία ἀναλυτικὴ συνάρτησις — ἐὰν ὑπάρχῃ - ὁμαλὴ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς κύκλου ἢ ἑνὸς κυκλικοῦ δακτυλίου. τῆς ὁποίας τὸ πραγματικὸν μέρος νὰ λαμβάνῃ ἐπὶ τοῦ (ἢ τῶν) συνόρου, διαδοχὰς τιμῶν δοθεισῶν ἐκ τῶν προτέρων».

τιμὴ ϑ_4 ἐπὶ τοῦ τόξου (ζ_3, 1). Ἡ συνάρτησις αὕτη, καθ' ἃ ἐλέχθη, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου IV τῆς Idr. Piana τοῦ U. Cisotti:

$$\text{(A)} \qquad \omega(\zeta) = \vartheta_1 + \frac{i}{\pi}\sum_h (\vartheta_{h+1} - \vartheta_h). \operatorname{Log.} \frac{\zeta - \zeta_h}{1 - \zeta_h \zeta}$$

Ἀλλ' ἡ συνάρτησις αὕτη, ὡς εἴδομεν εἰς Ἀρ. 8, ὀφείλει νὰ πληροῖ τὰς συνθήκας.

$$\begin{matrix} (\alpha) \\ (\beta) \end{matrix} \left\{ \begin{aligned} &\omega(i) = i \operatorname{Log.} V_\infty \\ &\omega(0) = 0 \end{aligned} \right.$$

αἵτινες γράφονται, μετ' ἀντικατάστασιν τῆς ω διὰ τῆς τιμῆς της ἐκ τῆς σχέσεως (A):

$$\begin{matrix} (\beta) \\ \\ (\beta) \end{matrix} \left\{ \begin{aligned} &\vartheta_1 + \frac{i}{\pi}\sum_{1}^{n-1}{}_h (\vartheta_{h+1} - \vartheta_h) \operatorname{Log.} \frac{i - \zeta_h}{1 - i\zeta_h} = i \operatorname{Log.} V_\infty \\ &\vartheta_1 + \frac{i}{\pi}\sum{}_h (\vartheta_{h+1} - \vartheta_h) \operatorname{Log.} (-\zeta_h) = 0 \end{aligned} \right.$$

Ἐὰν εἰς τὰς σχέσεις ταύτας θέσωμεν $\zeta_h = e^{i\sigma h}$ μὲ $h = 1, 2, 3, \ldots n-1$ ἔχομεν:

$$\begin{matrix} (\alpha) \\ \\ (\beta) \end{matrix} \left\{ \begin{aligned} &\vartheta_1 + \frac{i}{\pi}\sum_{1}^{n-1}{}_h (\vartheta_{h+1} - \vartheta_h) \operatorname{Log.} \frac{\sin\left(\frac{\sigma_h}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\sigma_h}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = i \operatorname{Log.} V_\infty \\ &\vartheta_1 = -\frac{1}{\pi}\sum_{1}^{n-1}{}_h (\vartheta_{h+1} - \vartheta_h)\, \sigma_h \end{aligned} \right.$$

Διὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ σχ. 9 ἣν μελετῶμεν, ἔχομεν:

$n = 4 \qquad \vartheta_1 = -\vartheta_4 = \alpha$

$\qquad\qquad\; \vartheta_2 = \vartheta_3 = 0$

Ὁμοίως: $\quad \sigma_1 < \pi, \quad \sigma_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \sigma_3 = \pi - \sigma_1, \quad \sigma_4 = 0$

καί: $\zeta_0 = -1, \quad \zeta_1 = e^{i\sigma_1}, \ \zeta_2 = i, \ \zeta_3 = -e^{-i\sigma_1} = -\frac{1}{\zeta_1}, \ \zeta_4 = 1$

ὁπότε ὁ τύπος (A) γίνεται:

$$\omega(\zeta) = \vartheta_1 + \frac{i}{\pi} \sum_{1}^{3}{}_{h} (\vartheta_{h+1} - \vartheta_h) \operatorname{Log.} \frac{\zeta - \zeta_h}{1 - \zeta_h \zeta}$$

$$= -\alpha + \frac{i}{\pi} \left\{ (\vartheta_2 - \vartheta_1) \operatorname{Log.} \frac{\zeta - i_1}{1 - \zeta_1 \zeta} + (\vartheta_3 - \vartheta_2) \operatorname{Log.} \frac{\zeta - i}{1 - i\zeta} \right.$$

$$\left. + (\vartheta_4 - \vartheta_3) \operatorname{Log.} \frac{\zeta - \zeta_3}{1 - \zeta_3 \zeta} \right\}$$

$$= -\alpha + \frac{i\alpha}{\pi} \operatorname{Log.} \frac{(\zeta_1 - \zeta)(1 + \zeta_1 \zeta)}{(\zeta_1 + \zeta)(1 - \zeta_1 \zeta)}$$

ἤτοι ἐν τέλει:

$$\text{(B)} \qquad \omega(\zeta) = \frac{i\alpha}{\pi} \operatorname{Log.} \frac{(\zeta_1 - \zeta)(1 + \zeta_1 \zeta)}{(\zeta_1 + \zeta)(1 - \zeta_1 \zeta)}$$

Αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη συνάρτησις ω (ζ).

Ἐπαληθεύεται εὐχερῶς ὅτι ἡ σχέσις (β) πληροῦται ἐκ ταυτότητος. Ὅσον ἀφορᾷ τὴν σχέσιν (α), αὕτη δίδει:

$$\operatorname{Log} V_\infty = \frac{1}{\pi} \sum_{1}^{n-1}{}_{h} (\vartheta_{h+1} - \vartheta_h) \operatorname{Log} \frac{\sin\left(\frac{\sigma_h}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\sigma_h}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Διὰ $h = 1$ ἔχομεν: $-\frac{\alpha}{\pi} \operatorname{Log.} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sigma_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma_1}{2}\right)}$

Διὰ $h = 2$ ἔχομεν: 0

Διὰ $h = 3$ ἔχομεν: $\frac{\alpha}{\pi} \operatorname{Log.} \frac{\sin\left(\frac{\sigma_3}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\sigma_3}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\alpha}{\pi} \operatorname{Log.} \frac{\sin\left(\frac{\pi - \sigma_1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi - \sigma_1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$

$$= \frac{\alpha}{\pi}\,\text{Log.}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sigma_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sigma_1}{2}\right)}$$

Προσθέτοντες εὑρίσκομεν :

$$\text{Log.}\,V_\infty = \frac{\alpha}{\pi}\,\text{Log.}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sigma_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sigma_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sigma_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sigma_1}{2}\right)} = \frac{\alpha}{\pi}\,\text{Log.}\frac{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sigma_1}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sigma_1}{2}\right)}$$

ὁπόθεν λαμβάνομεν :

$$(1) \qquad V_\infty = \left[\frac{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sigma_1}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sigma_1}{2}\right)}\right]^{\frac{\alpha}{\pi}}$$

Ἀλλ' ὡς γνωστόν : $\quad q = \Omega_1 V_\infty = \Omega_2$

ὥστε $\quad V_\infty = \dfrac{q}{\Omega_1}$

καὶ ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$(2) \qquad \frac{q}{\Omega_1} = \left[\frac{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sigma_1}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sigma_1}{2}\right)}\right]^{\frac{\alpha}{\pi}}$$

Ἡ σχέσις (2) συνδέει τὸ ἄγνωστον ὅρισμα σ_1 τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ εὐθύγραμμον ἐμπόδιον ὑπὸ κλίσιν α, μὲ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος q καὶ Ω_1. Λύοντες ὅθεν τὴν σχέσιν (2) ὡς πρὸς σ_1 ἔχομεν τὸ ὅρισμα σ_1 συναρτήσει τῶν q καὶ Ω_1. Πράγματι ἔχομεν :

$$\frac{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sigma_1}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sigma_1}{2}\right)} = \frac{1-\sin\sigma_1}{1+\sin\sigma_1} = \left(\frac{q}{\Omega_1}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}$$

ὁπόθεν :

$$(3) \qquad \sin\sigma_1 = \frac{1 - \left(\frac{q}{\Omega_1}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}}{1 + \left(\frac{q}{\Omega_1}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}} = \frac{1 - V^{\frac{\pi}{\alpha}}_{\infty}}{1 + V^{\frac{\pi}{\alpha}}_{\infty}}$$

δηλ. ἐν τέλει

$$(4) \qquad \sigma_1 = \text{arc. sin}\, \frac{1 - \left(\frac{q}{\Omega_1}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}}{1 + \left(\frac{q}{\Omega_1}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}} = \text{arc. sin}\, \frac{1 - V^{\frac{\pi}{\alpha}}_{\infty}}{1 + V^{\frac{\pi}{\alpha}}_{\infty}}$$

Ἐμπόδιον κάθετον. Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν τοῦ εὐθυγράμμου καὶ καθέτου ἐπὶ τὴν κατεύθυνσιν τοῦ ῥεύματος ἐμποδίου $\alpha = \frac{\pi}{\alpha}$ καὶ τὸ ὅρισμα σ_1 δίδεται:

$$(5) \qquad \sigma_1 = \text{arc. sin}\, \frac{1 - \left(\frac{q}{\Omega_1}\right)^{2}}{1 + \left(\frac{q}{\Omega_1}\right)^{2}} = \text{arc. sin.}\, \frac{1 - V^{2}_{\infty}}{1 + V^{2}_{\infty}}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ὅρισμα σ_1 ἐξαρτᾶται ὄχι μόνον ἀπὸ τὸ πλάτος Ω_1 τῆς διώρυγος καὶ τῆς γωνίας α τοῦ ἐμποδίου μετὰ τοῦ + οx δηλ. ἐκ γεωμετρικῆς διατάξεως τοῦ πεδίου ῥοῆς, ἀλλ' ἐξαρτᾶται ἐπίσης καὶ ἀπὸ τὴν παροχὴν q τῆς διώρυγος δηλ. καὶ ἀπὸ τὴν κινητικὴν κατάστασιν τοῦ ῥευστοῦ, τοῦθ' ὅπερ οὐδόλως ἦτο προφανὲς ἐκ τῶν π. οτέρων.

Τὸ ὅρισμα σ_1 εἶναι ὅθεν μία σταθερὰ δι' ὡρισμένην περίπτωσιν καὶ κατὰ συνέπειαν το αὐτὸ συμβαίνει διὰ τὸ μιγαδικὸν ἀριθμὸν $\zeta_1 = e^{i\sigma_1}$ τὸν ὁποῖον θὰ καλέσω ἐφεξῆς «**χαρακτηριστικὴν σταθερὰν τοῦ προβλήματος**».

Σημειώνω ὅτι $|\zeta_1| = 1$.

15. Γεωμετρικαὶ ἰδιότητες τῶν ἐλευθέρων γραμμῶν λ_1 καὶ λ_2. Ἐδείξαμεν εἰς τὸν Ἀρ. 11 ὅτι τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς ἐλευθέρας γραμμῆς λ_1 ἢ λ_2 — τὴν ὁποίαν ἐφεξῆς θὰ παριστάνω διὰ λ — τοῦ περιλαμβανομένου μεταξὺ τοῦ σημείου P_1 ἢ P_2 τοῦ τυχόντος σημείου εἶναι;

$$(D) \qquad \lambda = \frac{q}{\pi} \operatorname{Log.}\left[\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right]$$

ὁπόθεν λαμβάνομεν ἐπιλύοντες ὡς πρὸς $\zeta + \frac{1}{\zeta}$:

$$(1) \qquad \xi + \frac{1}{\zeta} = 2\, e^{\frac{\pi\lambda}{q}}$$

Ἀλλ' ἐκ τῆς προφανοῦς σχέσεως:

$$\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)^2 = \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)^2 - 4 = 4\, e^{\frac{2\pi\lambda}{q}} - 4 = 4\left(e^{\frac{2\lambda\pi}{q}} - 1\right)$$

προκύπτει:

$$(2) \qquad \zeta - \frac{1}{\zeta} = 2\sqrt{e^{\frac{2\pi\lambda}{q}} - 1} = 2\sqrt{A^2 - 1}$$

ἔνθα ἐτέθη: $\qquad A = e^{\frac{\pi\lambda}{q}}$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς σχέσεις (1) καὶ (2 ἔχομεν:

$$(3) \qquad \zeta = A + \sqrt{A^2 - 1}$$

Ἀφ' ἑτέρου ἡ καμπυλότης τῆς γραμμῆς λ δίδεται (βλ. ἀρ. 11).

$$(4) \qquad K = \frac{1}{r} = \frac{\pi}{q}\,\zeta\,\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1}\,\frac{d\vartheta}{d\zeta}$$

Ἀλλ' ἐφ' ἑκατέρας τῶν γραμμῶν λ, ἡ συνάρτησις ω (ζ) διατηρεῖται πραγματικὴ δηλ. συμπίπτει μὲ τὴν ϑ (= γωνία τῆς ταχύτητος V μὲ +o x). Συνεπῶς:

$$\frac{d\vartheta}{d\zeta} = \frac{d\omega}{d\zeta}$$

Εἴδομεν ὅμως (ἀριθ. 14) ὅτι:

$$\omega = \frac{i\alpha}{\pi} \operatorname{Log.} \frac{(\zeta_1 - \zeta)\ (1 + \zeta_1 \zeta)}{(\zeta_1 + \zeta)\ (1 - \zeta_1 \zeta)}$$

ἔνθα ζ_1 εἶναι ἡ χαρακτηριστικὴ σταθερὰ τοῦ προβλήματος δηλ. μιγαδικὸς ἀριθμὸς σταθερός. Ἀναφερόμενος εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν α εἶναι τυχοῦσα γωνία, ἔχω:

$$\frac{d\vartheta}{d\zeta} = \frac{d\omega}{d\zeta} = \frac{d}{d\zeta}\left\{ \frac{i\alpha}{\pi}\, \mathrm{Log.} \frac{(\zeta_1 - \zeta)\ (1+\zeta_1\zeta)}{(\zeta_1+\zeta)\ (1-\zeta_1\zeta)} \right\}$$

$$= \frac{i\alpha}{\pi}\left\{ \frac{d}{d\zeta}\, \mathrm{Log.}\ (\zeta_1-\zeta)\,(1+\zeta_1\zeta) - \frac{d}{d\zeta}\, \mathrm{Log.}\ (\zeta_1+\zeta)\,(1-\zeta_1\zeta) \right\}$$

Ἐκτελοῦντες τὴν ἄνω παραγώγισιν καὶ ἁπλοποιοῦντες εὑρίσκομεν:

$$\frac{d\vartheta}{d\zeta} = \frac{d\omega}{d\zeta} = \frac{i\alpha\zeta_1}{\pi}\left[\frac{1}{1-\zeta_1^2\zeta^2} - \frac{1}{\zeta_1^2-\zeta^2}\right]$$

καὶ συνεπῶς ἡ καμπυλότης τοῦ τόξου λ, θὰ εἶναι συμφώνως τῷ τύπῳ (4):

$$\frac{1}{r} = \frac{\pi}{q}\ \zeta\ \frac{\zeta-\frac{1}{\zeta}}{\zeta+\frac{1}{\zeta}}\ \frac{i\alpha\zeta_1}{\pi}\left[\frac{1}{1-\zeta_1^2\zeta^2} - \frac{1}{\zeta_1^2-\zeta^2}\right]$$

ἢ ἀκόμη:

$$\frac{1}{r} = \frac{i\alpha\zeta_1}{q}\ \zeta\ \frac{\zeta-\frac{1}{\zeta}}{\zeta+\frac{1}{\zeta}}\left[\frac{1}{1-\zeta_1^2\zeta^2} - \frac{1}{\zeta_1^2-\zeta^2}\right] \tag{5}$$

Ἄς ἀπαλείψωμεν ἤδη τὸ ζ μεταξὺ τῶν σχέσεων (D) καὶ (5). Πρὸς τοῦτο ἀντικαθιστῶ εἰς τὴν (5): ζ, $\zeta-\frac{1}{\zeta}$ καὶ $\zeta+\frac{1}{\zeta}$ διὰ τῶν τιμῶν αὐτῶν ἐξηγμένων ἐκ τῶν (1), (2), καὶ (3) καὶ ἔχω:

$$\frac{1}{r} = \frac{i\alpha\zeta_1}{q}\ (A+\sqrt{A^2-1})\ \frac{\sqrt{A^2-1}}{A}\left[\frac{1}{1-\zeta_1^2(A+\sqrt{A^2+1})^2} - \frac{1}{\zeta_1^2-(A+\sqrt{A^2-1})^2}\right]$$

ἢ ἀκόμη:

(6)

$$\frac{1}{r} = \frac{i\alpha\zeta_1}{q}\left[(A-\frac{1}{A})+\sqrt{A}\sqrt{A-\frac{1}{A}}\right]\left[\frac{1}{1-\zeta_1^2(A+\sqrt{A^2-1})^2} - \frac{1}{\zeta_1^2-(A+\sqrt{A^2-1})^2}\right]$$

καὶ ἐπειδή:

$$A - \frac{1}{A} = e^{\frac{\pi\lambda}{q}} - e^{\frac{-\pi\lambda}{q}} = 2\cos\text{ hyp. }\frac{\pi\lambda}{q} = 2\text{ch}\,\frac{\pi\lambda}{q}$$

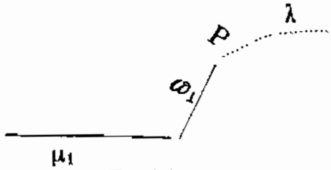
ἡ σχέσις (6) γράφεται ἐν τέλει:

$$\text{(X)}\qquad \frac{1}{r} = \frac{i\alpha\zeta_1}{q}\left[2\text{ch}\,\frac{\pi\lambda}{q} + e^{\frac{\pi\lambda}{2q}}\sqrt{2\text{ch}\,\frac{\pi\lambda}{q}}\right].$$

$$\left[\frac{1}{1-\zeta_1^2\, e\left(^{\frac{\pi\lambda}{q}}+\sqrt{e^{\frac{2\pi\lambda}{q}}-1}\right)^2} - \frac{1}{\zeta_1^2-\left(e^{\frac{\pi\lambda}{q}}+\sqrt{e^{\frac{2\pi\lambda}{q}}-1}\right)^2}\right]$$

Ἡ ἐξίσωσις (X) εἶναι μία ἀπ' εὐθείας σχέσις μεταξὺ τῆς καμπυλότητος $\frac{1}{r}$ καὶ ταῦ τόξου λ, συνεπῶς αὕτη εἶναι ἡ φυσικὴ ἐξίσωσις τῆς ἐλευθέρας γραμμῆς λ.

Παρατηρῶ ὅτι διὰ $\lambda = 0$ ἔχω: $\frac{1}{r} = 0$ τ.ἔ. εἰς τὰ σημεῖα ἀποκολλήσεως P_1 καὶ P_2 ἡ καμπυλότης μηδενίζεται. Ἡ ἐλευθέρα γραμμὴ γεννᾶται ἐφαπτομένως τῷ εὐθυγρ. ἐμποδίῳ (σχ. α). Ἃς ἀναζητήσωμεν εἰς ποῖον ἄλλο σημεῖον ἡ καμπυλότης τῆς λ εἶναι μηδέν. Πρὸς τοῦτο γράφω τὴν ἐξίσωσιν (X) ὑπὸ τὴν μορφήν:



Σχ. (α)

$$\frac{1}{r} = \frac{i\alpha\zeta_1}{q}\left[2\text{ch}\,\frac{\pi\lambda}{q} + e^{\frac{\pi\lambda}{2q}}\sqrt{2\text{ch}\,\frac{\pi\lambda}{q}}\right].\left[\frac{1}{1-\zeta_1^2\zeta^2} - \frac{1}{\zeta_1^2-\zeta^2}\right]$$

Παραγωγίζω τὴν σχέσιν ταύτην ὡς πρὸς ζ καὶ μηδενίζω τὴν παράγωγον:

$$\frac{2\,\zeta_1^2\,\zeta}{(1-\zeta_1^2\,\zeta^2)^2} - \frac{2\,\zeta}{(\zeta_1^2-\zeta^2)^2} = 0$$

ἐξ οὗ προκύπτει μία λύσις $\zeta = 0$. Οὕτω διὰ $\zeta = 0$ δηλ. εἰς τὸ ἐπ' ∞ κατάντι ἡ καμπυλότης τῆς ἐλευθέρας γραμμῆς μηδενίζεται τοῦθ' ὅπερ σημαίνει ὅτι ἡ γραμμὴ λ τείνει νὰ γίνη εὐθεία εἰς τὸ ἐπ' ∞ κατάντι.

Ἐν τῇ ἐξισώσει (X), ζ_1 εἶναι ἡ χαρακτηριστικὴ σταθερά. Διὰ τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ἡ ἐξίσωσις (X) γράφεται:

$$\frac{1}{r}=\frac{i\pi\zeta_1}{q}\left[2\mathrm{ch}\,\frac{\pi\lambda}{q}+e^{\frac{\pi\lambda}{2q}}\sqrt{2\mathrm{ch}\,\frac{\pi\lambda}{q}}\right].$$

$$\left[\frac{1}{1-\zeta_1^2\left(e^{\frac{\pi\lambda}{q}}+\sqrt{e^{\frac{2\pi\lambda}{q}}-1}\right)^2}-\frac{1}{\zeta_1^2-\left(e^{\frac{\pi\lambda}{q}}+\sqrt{e^{\frac{2\pi\lambda}{q}}-1}\right)^2}\right]$$

$$\text{μὲ } \zeta_1=e^{i\sigma_1}=\cos\sigma_1+i\sin\sigma_1=\frac{2V^2_\infty}{1+V^2_\infty}+i\,\frac{1-V^2_\infty}{1+V^2_\infty}$$

Ἀναλυτικὴ μορφὴ τῆς φυσικῆς ἐξισώσεως. Ἡ φυσικὴ ἐξίσωσις (X) ἐμφανίζεται ὑπὸ μορφὴν μιγαδικήν. Τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς ὡς πραγματικὸς ἀριθμὸς δέον νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ πραγματικὸν μέρος τοῦ δευτέρου μέλους. Εἶναι ὅθεν ἀπαραίτητον νὰ χωρίσω εἰς τὸ 2ον μέλος, τὸ πραγματικὸν μέρος ἀπὸ τὸ φανταστικὸν τοιοῦτον.

Πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον, μετασχηματίζω κατ' ἀρχὰς τὴν παράστασιν:

$$M=\quad i\zeta_1\left[\frac{1}{1-\zeta_1^2\zeta^2}-\frac{1}{\zeta_1^2-\zeta^2}\right]$$

παρατηρῶν ὅτι: $\quad \zeta_1^2=(\cos\sigma_1+i\sin\sigma_1)^2=\cos 2\sigma_1+i\sin 2\sigma_1$

Ἔχω:

$$M=i\,\zeta_1\left[\frac{1}{(1-\zeta^2\cos 2\sigma_1)^2-i\sin 2\sigma_1.\zeta^2}-\frac{1}{(\cos 2\sigma_1-\zeta^2)+i\sin 2\sigma_1}\right]$$

$$=i\,\zeta_1\left[\frac{(1-\zeta^2\cos 2\sigma_1)+i\sin 2\sigma_1.\zeta^2}{(1-\zeta^2\cos 2\sigma_1)^2+\sin^2 2\sigma_1.\zeta^4}\cdot\frac{(\cos 2\sigma_1-\zeta^2)-i\sin 2\sigma_1}{(\cos 2\sigma_1-\zeta^2)^2+\sin^2 2\sigma_1}\right]$$

Ἢ ἀκόμη, χωρίζων τὸ πραγματικὸν μέρος ἀπὸ τὸ φανταστικὸν τοιοῦτον καὶ ἀντικαθιστῶν $i\,\zeta_1$ διὰ τῆς τιμῆς του: $i\cos\sigma_1-\sin\sigma_1$:

$$M=(i\cos\sigma_1-\sin\sigma_1)\left\{\left[\frac{1-\cos 2\sigma_1\,\zeta^2}{(1-\zeta^2\cos 2\sigma_1)^2+\zeta^4\sin^2 2\sigma_1}-\frac{\cos 2\sigma_1-\zeta^2}{(\cos 2\sigma_1-\zeta^2)^2+\sin^2 2\sigma_1}\right]\right.$$

$$\left.+i\left[\frac{\zeta^2\sin 2\sigma_1}{(1-\zeta^2\cos 2\sigma_1)^2+\zeta^4\sin^2 2\sigma_1}+\frac{\sin 2\sigma_1}{(\cos 2\sigma_1+\zeta^2)^2+\sin^2 2\sigma_1}\right]\right\}$$

Τὸ πραγματικὸν μέρος τῆς M γράφεται προφανῶς:

$$M_1 = \frac{-\sin\sigma_1 (1-\zeta^2 \cos 2\sigma_1)}{(1-\zeta^2\cos 2\sigma_1)^2+\zeta^4\cos 2\sigma_1)} + \frac{\sin\sigma_1 (\cos 2\sigma_1 - \zeta^2)}{(\cos 2\sigma_1-\zeta^2)^2+\sin^2 2\sigma_1}$$

$$- \frac{\zeta^2 \cos\sigma_1 \sin 2\sigma_1}{(1-\zeta^2\cos 2\sigma_1)^2+\zeta^4\sin^2 2\sigma_1} - \frac{\cos\sigma_1 \sin 2\sigma_1}{(\cos\sigma_1 - \zeta^2)^2 - \sin^2 2\sigma_1}$$

ἢ ἀκόμη:

$$(7)\ M_1 = \frac{-\sin\sigma_1 - \zeta^2 \sin\sigma_1 \cos 2\sigma_1 - \zeta^2 \cos\sigma_1 \sin 2\sigma_1}{(1-\zeta^2\cos 2\sigma_1)^2+\zeta^4 \sin^2 2\sigma_1}$$

$$+ \frac{\sin\sigma_1 \cos 2\sigma_1 - \cos\sigma_1 \sin 2\sigma_1 - \zeta^2 \sin\sigma_1}{(\cos 2\sigma_1-\zeta^2)^2+\sin^2 2\sigma_1}$$

Ἀλλ' ἔχομεν: $\sin\sigma_1 \cos 2\sigma_1 - \cos\sigma_1 \sin 2\sigma_1 = \sin(\sigma_1 - 2\sigma_1) = \sin(-\sigma_1) = -\sin\sigma_1$
καί: $(1-\zeta^2\cos 2\sigma_1)^2+\zeta^4\sin^2 2\sigma_1 = \zeta^4 - 2\cos 2\sigma_1\, \zeta^2 + 1 = (\zeta^2 - \cos 2\sigma_1)^2 = \sin^2 2\sigma_1$
ὁμοίως: $(\cos 2\sigma_1 - \zeta^2)^2 + \sin^2 2\sigma_1 = \zeta^4 - 2\cos 2\sigma_1\, \zeta^2 + 1 = (\zeta^2 - \cos 2\sigma_1)^2 + \sin^2 2\sigma_1$
Καὶ ἡ σχέσις (7) κατόπιν ἁπλοποιήσεων γράφεται:

$$M_1 = -\sin\sigma_1 (1+\zeta^2) \left[\frac{1}{\zeta^4 - 2\zeta^2\cos 2\sigma_1 + 1} + \frac{1}{\zeta^4 - 2\zeta^2\cos 2\sigma_1 + 1}\right]$$

$$= - \frac{2(1+\zeta^2)\sin\sigma_1}{(\zeta^2 - \cos 2\sigma_1)^2 - \sin^2 2\sigma_1}$$

Ἀναχωροῦντες ἀπὸ τὴν σχέσιν (5) γράφομεν:

$$\frac{1}{r} = -\frac{2\alpha}{q} \sin\sigma_1 (1+\zeta^2)\, \zeta \frac{\zeta^2}{\zeta^2+1} \frac{1}{(\zeta^2 - \cos 2\sigma_1)^2 + \sin^2 2\sigma_1}$$

ἤτοι:

$$(8)\ \frac{1}{r} = - \frac{2\alpha \sin\sigma_1}{q} \frac{\zeta(\zeta^2-1)}{(\zeta^2 - \cos 2\sigma_1)^2 - \sin^2 2\sigma_1}$$

Ἀλλ' ἔχομεν: $\zeta(\zeta^2-1) = \zeta^2 \left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) = (A+\sqrt{A^2-1})^2\, 2\sqrt{A^2-1}$

Κατόπιν ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (8) αὕτη γράφεται:

$$\frac{1}{r} = - \frac{4\alpha \sin\sigma_1}{q} \frac{\sqrt{A^2-1}\ (A+\sqrt{A^2-1})}{[(A+\sqrt{A^2-1})^2 - \cos 2\sigma_1]^2 + \sin^2 2\sigma_1}$$

καὶ ἐν τέλει, δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ Α ὑπὸ τῆς τιμῆς του: $e^{\frac{\lambda\pi}{q}}$

$$(\mathrm{X}\alpha)\quad \frac{1}{r} = -\frac{4a\,sin\sigma_1}{q}\;\frac{\sqrt{e^{\frac{2\pi\lambda}{q}}-1}\left(e^{\frac{\pi\lambda}{q}}-\sqrt{e^{\frac{2\pi\lambda}{q}}-1}\right)^2}{\left[\left(e^{\frac{\pi\lambda}{q}}+\sqrt{e^{\frac{2\pi\lambda}{q}}-1}\right)^2-cos2\sigma_1\right]^2+sin^2 2\sigma_1}$$

Ἡ ἐξίσωσις Χα εἶναι ἡ ἀναλυτικὴ φυσικὴ ἐξίσωσις τῆς ἐλευθέρας γραμμῆς λ, συνδέουσα ἀπ' εὐθείας τὴν καμπυλότητα $\frac{1}{r}$ μὲ τὸ τόξον λ, ἀπηλλαγμένη μιγαδικῶν. Ἐν τῇ ἐξισώσει ταύτῃ σ_1 εἶναι τὸ ὅρισμα τῆς χαρακτηριστικῆς σταθερᾶς (ἄρ. 14) δηλ. ἓν δεδόμενον τοῦ προβλήματος, συνάρτησις τῆς κινητικῆς καταστάσεως τοῦ ῥευστοῦ. Ἡ ἐφαρμογὴ τῆς ἐξισώσεως ταύτης οὐδεμίαν δυσχέρειαν παρουσιάζει.

Παρατηρῶ εὐχερῶς ὅτι τὸ 2ον μέλος τῆς Χα εἶναι ἀριθμὸς ἀρνητικὸς δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ λ δηλ. ἡ καμπυλότης τῆς γραμμῆς λ διατηρεῖται ἀρνητική, ἑπομένως ἡ θ εἶναι φθίνουσα συνάρτησις τοῦ τόξου. Ἐπειδὴ δὲ ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, ἡ γραμμὴ λ γεννᾶται ἐφαπτομένως τῷ ἐμποδίῳ, ἕπεται ὅτι ἡ λ στρέφει διαρκῶς τὰ κοῖλα πρὸς τὸ ἐν ἠρεμίᾳ ῥευστόν. Ἐπανευρίσκεται οὕτω διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ μιὰ χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τῆς γραμμῆς λ. (Βλ. ἄρ. 3, περὶ θεωρίας τῆς ἠρέμου ζώνης).

ΜΕΡΟΣ IV

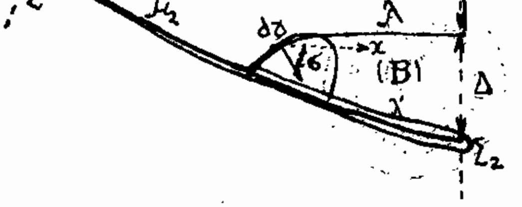
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΩΣ

Λέγοντες Ἀντίστασιν ἐννοοῦμεν τὴν γενικὴν συνισταμένην τῶν πιέσεων τῶν ἀσκουμένων ὑπὸ τοῦ ἐν κινήσει ῥευστοῦ ἐπὶ τοῦ στερεοῦ καὶ ἀμετακινήτου ἐμποδίου. Εἶναι ἡ κυριωτέρα ἄγνωστος τοῦ προβλήματος λόγῳ τῆς κεφαλαιώδους σημασίας τὴν ὁποίαν ἐνέχει ἡ γνῶσις αὐτῆς διὰ τὰς τεχνικὰς ἐφαρμογάς.

Θὰ ἠδυνάμην λίαν εὐχερῶς νὰ συνεχίσω τὸν ὑπολογισμὸν τοῦτον ἐπὶ τοῦ προβλήματος τοῦ «ὑγροῦ νήματος» εἰς τὸ ὁποῖον μετετόπισα ἀρχικῶς (ἄρ. 5) τὸ θέμα. Κατώρθωσα οὐχ' ἧττον νὰ χειρισθῶ τὸ κεφάλαιον τοῦτο ἀπ' εὐθείας εἰς τὴν ἀπολύτως γενικὴν περίπτωσιν τῆς διώρυγος τυχούσης μορφῆς μὲ στερεὸν ἐμπόδιον οἱουδήποτε σχήματος καὶ τοῦτο διὰ δύο διαφόρων μεθόδων ἀλληλοεπαληθευομένων.

17. Iη Μέθοδος. «Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ Λήμματος τοῦ Green». Ἐπανέρχομαι εἰς τὸ πρόβλημα ὑπὸ τὴν γενικὴν αὐτοῦ μορφήν. Θεωρῶ (σχ. 11) διώρυγα περιοριζομένην ὑπὸ δύο στερεῶν παρειῶν μ_1 καὶ μ_2 μορφῆς τυχούσης, μὲ ἐμπόδιον S στερεὸν καὶ ἀμετακίνητον ἔχον οἱονδήποτε σχῆμα (πάντως ὅμως ὁμαλόν), προσκεκολλημένον εἰς τὴν ἑτέραν τῶν παρειῶν, τὴν μ_2 λ.χ.

Καλῶ $d\gamma$ τὸ στοιχειῶδες τόξον τῆς περιμέτρου γ τοῦ στερεοῦ ἐμποδίου, σ τὴν γωνίαν τῆς πρὸς τὰ ἔσω τοῦ ἐμποδίου ἡμι-καθέτου μὲ τὸν ἄξονα + ox.



Σχ. 11

Ἡ συνισταμένη τῶν δυναμικῶν πιέσεων τῶν ἀσκουμένων ἐπὶ τῆς γραμμῆς γ ὑπὸ τοῦ ἐν κινήσει ῥευστοῦ ἔχει συνιστώσας:

$$R_x = -\int_\gamma p'.\cos\sigma.\, d\gamma$$

$$R_y = -\int_\gamma p'.\sin\sigma.\, d\gamma$$

τοὺς ὁποίους τύπους δυνάμεθα νὰ συνδυάσωμεν εἰς ἕνα μοναδικόν:

$$(1) \qquad R = R_x + i R_y = -\int_\gamma p' e^{i\sigma} d\gamma$$

Ἀλλ' ἡ δυναμικὴ αὕτη πίεσις p' εἶναι, κατ' ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος τοῦ Bernouilli (Βλ. ἀρ. 13):

$$p' = \frac{1}{2}\left(1 - V^2\right) \qquad (\text{'Εν B ἔχομεν: } p' = 0)$$

Καὶ ἡ σχέσις (1) γράφεται:

$$R = R_x + i R_y = -\frac{1}{2}\int_\varpi (1 - V^2)\, e^{i\sigma}\, d\varpi$$

ἐξ οὗ ἐμφαίνεται ὅτι ἡ R ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς κινητικῆς καταστάσεως τοῦ ῥευστοῦ ἐπὶ τῆς παρειᾶς ϖ.

Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς R θεωρῶ τὰς δύο διατομὰς Σ καὶ Σ_1 τῆς διώρυγος εἰς τὰ σημεῖα ἐπ' ∞ ἀνάντι καὶ κατάντι. Προφανῶς $V_\infty\, s = 1\, S_1$

Ὑπενθυμίζω ἤδη τὸ Λῆμμα τοῦ Green:[1]

»Ἐὰν φ (x, y) εἶναι μία συνάρτησις μονότιμος ὁμαλὴ καὶ ἁρμονικὴ ἔν τινι τόπῳ περιοριζομένῳ ὑπὸ κλειστῆς γραμμμῆς s (ἢ γενικώτερον ὑπὸ συστήματος τοιούτων γραμμῶν), ἐὰν θέσωμεν:

$$V^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2$$

---

1 Βλέπε μίαν ἁπλῆν ἀπόδειξιν τοῦ Λήμματος τοῦ Green ὀφειλομένην εἰς τὸν Levi-Civita, ἐκτιθεμένην ὑπὸ U. Cisotti, εἰς τὸ σύγγραμμα αὐτοῦ «Idr. Piana» σελ. 122.

ὑφίσταται ἡ σχέσις :

$$\text{(E)} \qquad \int_s \frac{d\varphi}{dn}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) ds = \frac{1}{2}\int_s V^2 e^{i\sigma} ds$$

ἐν τῇ ὁποίᾳ: n εἶναι ἡ κάθετος εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον τῆς γραμμῆς γ τοῦ στερεοῦ ἐμποδίου, διευθυνομένη πρὸς τὸ ἐσωτερικόν, σ = ἡ γωνία τῆς n μὲ τὴν +ox. Ὑπονοεῖται ὅτι διὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν ἡ μεταβλητὴ δέον νὰ διατρέξῃ τὸ συνόρον s εἰς τὴν συμβατικὴν εὐθεῖαν φορὰν (sens direct) ἥτις ἀφίνει διαρκῶς ὁλόκληρον τὸν τόπον πρὸς τὰ ἀριστερά».

Ἔστω φ τὸ δυναμικὸν τῶν ταχυτήτων τοῦ ῥευστοῦ στοιχείων ἐν τῷ πεδίῳ τῆς κινήσεως A (σχ. 11) καὶ V ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς ταχύτητος. Ἐν τυχὸν ῥευστὸν στοιχεῖον ἐκκινῆσαν ἐκ τοῦ ἐπ' ∞ ἀνάντι ἐν ἐπαφῇ μὲ τὴν παρειὰν μ_2 λ. χ. ὀφείλει νὰ ρέῃ ἐν διηνεκῇ ἐπαφῇ μὲ τὴν μ_2, εἶτα μὲ τὴν παρειὰν ϖ τοῦ ἐμποδίου καὶ τέλος μὲ τὴν λ. Ὁμοίως διὰ τὴν μ_1. Κατὰ συνέπειαν: κατὰ μῆκος τῶν γραμμῶν μ_1, μ_2, ϖ καὶ λ δέον νὰ ἰσχύῃ ἡ γνωστὴ συνθήκη παρειᾶς:

$$\text{(3)} \qquad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$$

ἔνθα α καὶ β εἶναι τὰ συνημίτονα κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς παρειᾶς.

Ἡ σχέσις (3) γράφεται ἐπίσης, ὡς γνωστόν:

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0 \qquad \text{('Επὶ } \mu_1,\ \mu_2,\ \varpi \text{ καὶ } \lambda)$$

Οὕτω ἡ ὁλικὴ παράγωγος $\frac{d\varphi}{dn}$ λαμβάνει τὰς κάτωθι τιμάς:

$$\frac{d\varphi}{dn} = \begin{cases} 0 & \text{'Επὶ τῶν γραμμῶν } \mu_1,\ \mu_2,\ \varpi,\ \lambda, \\ V_\infty & \text{ἐπὶ τῆς διατομῆς } \Sigma \ \text{(ἐπ'}\infty \text{ ἀνάντι)} \\ -1 & \text{» \quad » \quad » \quad } \Sigma_1 \ \text{(ἐπ'}\infty \text{ κατάντι)} \end{cases}$$

Ὁμοίως δέον νὰ ἔχωμεν:

$$w = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \begin{cases} V_\infty & \text{ἐπὶ } \Sigma \\ e^{i\beta} & \text{ἐπὶ } \Sigma_1 \end{cases}$$

ἔνθα $\beta =$ γωνία τῆς ἀσυμπτωτικῆς διευθύνσεως τοῦ ῥεύματος πρὸς τὰ κατάντι μὲ τὴν $+$ ox.

Τέλος δέον νὰ ἔχωμεν : $\sigma = 0$ ἐπὶ Σ

$\sigma = \vartheta + \pi$ ἐπὶ λ

καὶ $V = 1$ ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἀσυνεχείας λ.

Ἐφαρμόζων τὸν τύπον (E) τοῦ Green, εἰς τὴν κλειστὴν γραμμήν :

$$s = \Sigma + \mu_2 + \lambda' + \varpi + \lambda + \Sigma_1 + \mu_1$$

ἐμφαινομένην δι' ἐρυθρᾶς γραμμῆς ἐπὶ τοῦ σχ. 11, λαμβάνω :

$$(4) \qquad s\,V^2{}_\infty - s_1\, e^{i\beta} = \int_{\varpi} V^2 e^{i\sigma} d\varpi + \int_{\mu_1+\mu_2} V^2 e^{i\sigma} d\mu + \int_{\lambda+\lambda'} e^{i\sigma} d\lambda$$

Ἀφ' ἑτέρου ἡ σχέσις (2) δίδει :

$$(5) \qquad 2\,R = -\int_{\varpi} e^{i\sigma} d\varpi + \int_{\varpi} V^2 e^{i\sigma} d\varpi$$

Εἰς τὴν ἀνωτέρω (5) σχέσιν ἀντικαθιστῶ τὸ 2ον ὁλοκλήρωμα ὑπὸ τῆς τιμῆς του ἐξηγμένης ἐκ τῆς (4), καὶ ἔχω :

$$(6) \qquad 2\,R = s\,V^2{}_\infty - s_1\, e^{i\beta} - \int_{\mu_1+\mu_2} V^2 e^{i\sigma} d\mu - \int_{\lambda+\varpi+\lambda} e^{i\sigma} ds$$

Οἴκοθεν νοεῖται ὅτι τὸ $\int_{\mu_1+\mu_2}$ ἐκτείνεται ἐφ' ὅλου τοῦ μήκους τῆς παρειᾶς μ_2 (ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$), καθὼς καὶ τῆς μ_1.

Ἀλλὰ τὸ ὁλοκλήρωμα : $\int_{\lambda+\varpi+\lambda'+\Delta} e^{i\sigma} ds$ εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Cauchy, καθότι ἡ γραμμὴ $\lambda + \varpi + \lambda' + \Delta$ εἶναι κλειστή. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι :

$$\int_{\lambda'+\omega+\lambda} e^{i\sigma}\, ds = -\int_{\Delta} e^{i\sigma}\, ds = -\,\Delta\, e^{i\beta}$$

διότι $\sigma = \beta$ ἐπὶ τῆς Δ. Τοιουτοτρόπως ἡ σχέσις (6) λαμβάνει τελικῶς τὴν μορφήν :

$$\text{(XI)} \qquad 2\ R = s\ V^2_\infty\ s_1\ e^{i\beta} + \Delta\ e^{i\beta} - \int_{\mu_1+\mu_2} V^2\ e^{i\sigma}\ d\mu$$

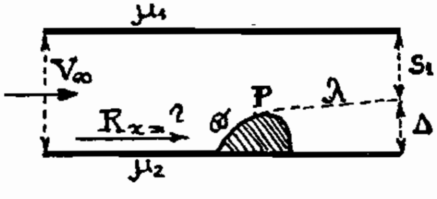
Ὁ τύπος XI λύει τὸ πρόβλημα ἐν τῇ γενικῇ αὐτοῦ μορφῇ, διότι οὗτος δίδει πράγματι τὴν γενικὴν συνισταμένην τῶν πιέσεων ὅταν εἶναι γνωστὸν τὸ σχῆμα τῶν δύο παρειῶν μ_1 καὶ μ_2 τῆς διώρυγος.

Εἰδικὴ περίπτωσις. Διώρυξ μὲ παρειὰς εὐθυγράμμους καὶ παραλλήλους τῷ ἄξονι ox. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ (σχ. 12), τοῦ ἐμποδίου ἔχοντος πάντοτε σχῆμα τυχόν, ἔχομεν :

$$\beta = 0$$

$$\sigma = -\frac{\pi}{2} \text{ ἐπὶ } \mu_1$$

$$\sigma = +\frac{\pi}{2} \text{ ἐπὶ } \mu_2$$



(Σχ. 12)

Καὶ κατὰ συνέπειαν :

$$\int_{\mu_1+\mu_2} V^2\, e^{i\sigma}\, d\mu = \int_{\mu_1+\mu_2} V^2 \left(e^{\frac{-i\pi}{2}} + e^{\frac{i\pi}{2}}\right) d\mu = 0$$

Ἀντικαθιστῶν εἰς τὴν σχέσιν XI, ἔχω :

$$2R = s\ V^2_\infty - s_1\ e^{i\beta} - \Delta\ e^{i\beta}$$

$$= s\ V^2_\infty - (s_1 - \Delta)$$

$$= s\,\frac{s_1^2}{s^2} - (s_1 - \Delta) = \frac{s_1^2 - s\ (s_1 - \Delta)}{s} = \frac{s_1^2 - s(s - 2\Delta)}{s}$$

$$= \frac{(s-\Delta)^2 - s\,(s-2\Delta)}{s} = \frac{s^2 - 2s\Delta + \Delta^2 - s^2 + 2s\Delta}{s}$$

$$= \frac{\Delta^2}{s}$$

δηλαδή:

$$R = R_x + i\,R_y = \frac{\Delta^2}{2s}$$

Τὸ φανταστικὸν μέρος εἶναι κατ' ἀνάγκην μηδὲν καὶ οὕτω λαμβάνω τοὺς ἁπλουστάτους τύπους:

$$R_x = \frac{\Delta^2}{2s}$$

$$R_y = 0$$

Ἐπανευρίσκω οὕτω τὸ κομψότατον θεώρημα τοῦ καθηγ. u. U. Cisotti ἔχον οὕτω: «Ἡ ἀπ' εὐθείας ἀντίστασις R_x ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀσυμπτωτικοῦ εὔρους τοῦ διακένου, διῃρημένον διὰ σταθεροῦ πλάτους τῆς διώρυγος».[1]

Τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο, οὐδόλως προφανὲς ἐκ τῶν προτέρων, εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ σχήματος τῆς παρειᾶς τοῦ στερεοῦ ἐμποδίου. Ἀποτελεῖ φυσικὴν σχέσιν μὴ ἐξαρτωμένην δηλ. ἐκ τῶν παραμέτρων καὶ τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς.

Σημειώνω ὅτι δὲν πρόκειται ἁπλῶς περὶ ἐπανευρέσεως τοῦ ὡς ἄνω γνωστοῦ θεωρήματος διὰ τὴν αὐτὴν περίπτωσιν δι' ἣν ὁ συγγραφεὺς ἀπέδειξεν αὐτό, ἀλλὰ περὶ ἰσχύος τοῦ θεωρήματος τούτου καὶ διὰ τὴν ἡμετέραν περίπτωσιν, τελείως διάφορον.

18. Ἀντίστασις τῶν πορειῶν τῆς διώρυγος μ_1 καὶ μ_2. Ἡ γενικὴ συνισταμένη τῶν πιέσεων τῶν ἀσκουμένων ὑπὸ τοῦ ἐν κινήσει ῥευστοῦ ἐπὶ τῶν στοιχείων $d\mu$, στερεῶν παρειῶν μ_1 καὶ μ_2 τῆς διώρυγος (σχ. 11), ἔχει συνιστώσας:

$$R_x' = -\frac{1}{2}\int_{\mu_1+\mu_2} (1-V^2)\cos\sigma\; d\mu$$

---

[1] Τὸ θεώρημα τοῦτο ἐδόθη ὑπὸ τοῦ καθηγ. κ. U. Cisotti εἰς τὸ περισπούδαστον ὑπόμνημα αὐτοῦ «Sul moto di un solido in un canale» Rendiconti del. Circolo Matématico di Palermo, 1909», διά τὴν περίπτωσιν τῆς συμμετρικῆς διώρυγος, μὲ παρειὰς εὐθυγράμμους καὶ παραλλήλους, μὲ ἐμπόδιον συμμετρικοῦ σχήματος.

$$R'_y = -\frac{1}{2}\int_{\mu_1+\mu_2} (1-V^2)\sin\sigma \, d\mu$$

τοὺς ὁποίους τύπους δυνάμεθα νὰ συνδυάσωμεν εἰς ἕνα μοναδικόν:

$$(1) \qquad R' = R'_x + i R'_y = -\frac{1}{2}\int_{\mu_1+\mu_2} (1-V^2)\sin\sigma \, d\mu$$

Ὡς πρὸς τὴν p_0 ἰσχύει ἡ αὐτὴ παρατήρησις (δηλ. ἐπιρροὴ $= 0$)

Ἡ σχέσις (1) δίδει: $$\int_{\mu_1+\mu_2} V^2 e^{i\sigma} d\mu = 2R' + \int_{\mu_1+\mu_2} e^{i\sigma} d\mu$$

Ἀλλ' ἐπειδή: $$\int_{s+\mu_2+\Delta+s_1+\mu_1} e^{i\sigma} d\mu = 0$$ (Δυνάμει τοῦ θεωρ. τοῦ Cauchy, ἀφοῦ ἡ γραμμὴ $s+\mu_2+\Delta+s_1+\mu_1$ εἶναι κλειστή).

ἕπεται ὅτι:

$$\int_{\mu_1+\mu_2} e^{i\sigma} d\mu = -\int_{s+s_1+\Delta} e^{i\sigma} d\mu = -s + (s_1+\Delta) e^{i\beta}$$

Ὥστε ἔχω: $$(2) \qquad \int_{\mu_1+\mu_2} V^2 e^{i\sigma} d\mu = 2R' - s + (s_1+\Delta) e^{i\beta}$$

Ἀλλ' ὁ γενικὸς τύπος (XI) τοῦ ἀριθ. 17 δίδει:

$$(3) \qquad \int_{\mu_1+\mu_2} V^2 e^{i\sigma} d\mu = 2R + sV^2_\infty - (s_1-\Delta) e^{i\beta}$$

Ἐξισώνων τὰ δεύτερα μέλη τῶν σχέσεων (2) καὶ (3), λαμβάνω:

$$2R' - s + (s_1+\Delta) e^{i\beta} = -2R + s V^2_\infty - (S_1-\Delta) e^{i\beta}$$

ἢ ἀκόμη:

$$2(R+R') = \frac{s_1^2}{s} + s \quad 2s_1 e^{i\beta}$$

ἥτις σχίζεται εἰς τὰς κάτωθι δύο σχέσεις:

$$(\mathrm{XIII}) \qquad \begin{aligned} 2\,(R_x + R'_x) &= \frac{s_1^2}{s} + s - 2s_1 \cos\beta \\ 2\,(R_y + R'_y) &= -\,2s_1 \sin\beta \end{aligned}$$

Οἱ γενικοὶ τύποι (XIII) δίδουσι τὰς συνιστώσας R'_x καὶ R'_y τῆς γενικῆς συνισταμένης τῶν πιέσεων τῶν ἀσκουμένων ἐπὶ τῶν δύο παρειῶν μ_1 καὶ μ_2 τῆς διώρυγος. R_x καὶ R_y εἶναι αἱ τοιαῦται τῆς συνισταμένης τῶν πιέσεων τῶν ἀσκουμένων ἐπὶ τοῦ στερεοῦ ἐμποδίου ἐξηγμέναι ἐκ τῆς ἐξισώσεως XI τοῦ ἄρ. 17, δι' ἑκάστην συγκεκριμμένην περίπτωσιν.

Διὰ τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν τῆς διώρυγος μὲ παρειὰς εὐθυγράμμους καὶ παραλλήλους τῷ οx, εὑρίσκομεν εὐκόλως:

$$R'_x = 0$$

$$R_y = \frac{\Delta^2}{2s}$$

$$R_y + R'_y = 0$$

ὡς ἠδύνατό τις νὰ προβλέψῃ.

II Μέθοδος. Διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τοῦ Euler.

Εὑρίσκομαι πάντοτε εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν τοῦ σχ. 11 καὶ προτίθεμαι νὰ ἐπανεύρω τοὺς τύπους τῆς Ἀντιστάσεως δι' ἄλλης ὁδοῦ. Τὸ ῥευστὸν κινεῖται ἐν μονίμῳ ῥύσει συνεπῶς ἔχει ἐφαρμογὴν τὸ θεώρημα τοῦ Euler (οὗτινος ἀπόδειξις ἐκτίθεται εἰς τὴν «Aérodynamique» de Joukowski, G. V. 1916), ὅπερ ὑπενθυμίζω:

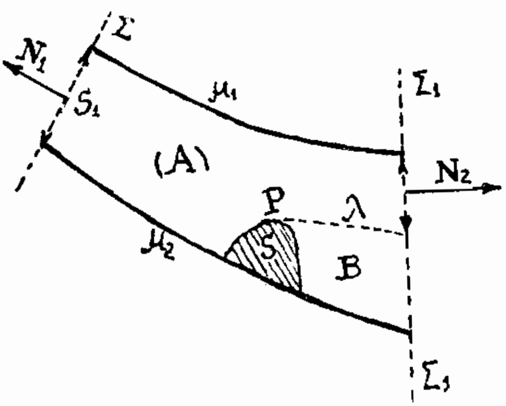
» Θεωρήσωμεν ἔν τινι ῥευστῷ ἐν κινήσει ἓν σωληνοειδὲς ἢ ὑγρὸν νῆμα, περιοριζόμενον ὑπὸ συνόλου γραμμῶν ῥεύματος σχηματιζουσῶν ἓν εἶδος διώρυγος, καὶ ὑπὸ δύο καθέτων διατομῶν Α καὶ Β (σχ. β. εἰς παροράματα) Ἐὰν οὐδεμία ἐξωτερικὴ δύναμις ἐνεργεῖ, τὸ σύνολον τῶν πιέσεων τῶν ἀσκουμένων ἐπὶ τοῦ οὕτω περιοριζομένου σωλῆνος εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς δύο δυνάμεις: MV καὶ MV_1 καθέτους διαδοχικῶς ἐπὶ τὰ διαφράγματα Α καὶ Β, ἔνθα M = ποσότης ῥευστοῦ ῥέουσα διὰ τοῦ σωλῆνος εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου.

Διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τούτου, τὸ σύνολον τῶν πιέσεων τῶν ἀσκουμένων ὑπὸ τοῦ κινουμένου ῥευστοῦ ἐπὶ τῆς συνοριακῆς γραμμῆς τοῦ πεδίου ῥοῆς Α, εἶναι εἰς τὴν περίπτωσίν μας ἰσοδύναμον πρὸς δύο δυνάμεις ἐφηρμοσμένας εἰς τὰς δύο ἀκραίας διατομὰς Σ καὶ Σ_1 τῶν ἐπ' ∞ ἀνάντι καὶ κατάντι, ἤτοι :

$$(1) \quad \begin{aligned} N_1 &= MV_\infty = (sV_\infty)\, V_\infty = s\, V^2_\infty \\ N_2 &= MV_1 = (s_1V_1)\, V_1 = s_1\, V_1^2 \end{aligned}$$

Εἰς τοὺς τύπους (1) : V_∞ παριστάνει, ὡς πάντοτε, τὴν δοθεῖσαν ταχύτητα τοῦ ῥευστοῦ εἰς τὸ ἐπ' ∞ ἀνάντι, παράλληλον τῷ $+$ ox, καὶ $V_1 =$ ταχύτης τοῦ ῥευστοῦ εἰς τὸ ἐπ' ∞ κατάντι $= 1$ (ἀλλαγὴ μονάδων).

Ἡ φορὰ τῶν δυνάμεων N_1 καὶ N_2 ἐμφαίνεται εἰς τὸ κάτωθι σχ. 13.



Σχ. 13

Ἡ πίεσις p_o ἐν τῇ ζώνῃ τοῦ διακένου, δίδει ὡς γνωστὸν ἐπιρροὴν 0. Ἡ ἐπὶ τοῦ διαφράγματος s πίεσις εἶναι :

$$p = \frac{1}{2}(1 - V^2_\infty)$$

Ἀφ' ἑτέρου ἔχομεν : $s\, V_\infty = s_1\, 1$, ἀφοῦ ἡ παροχὴ τῆς διώρυγος πρέπει νὰ εἶναι σταθερὰ τόσον πρὸς τὰ ἀνάντι ὅσον πρὸς τὰ κατάντι, τῆς ῥύσεως οὔσης μονίμου.

Θὰ ἔχω τὴν συνολικὴν πίεσιν τὴν ἀσκουμένην ὑπὸ τοῦ ἐν κινήσει ῥευστοῦ ἐπὶ τῶν παρειῶν μ_1 καὶ μ_2 καὶ τὰ διαφράγματα s καὶ s_1 ἐὰν ἀντιστρέψω τὴν φορὰν τῶν δύο δυνάμεων N_1 καὶ N_2 καὶ προβάλω ἐπὶ τοὺς δύο ἄξονας. Ἐὰν ὅθεν καλέσω R_x καὶ R_y τὰς συνιστώσας κατὰ ox καὶ oy, τῆς ὁλικῆς πιέσεως τῆς ἀσκουμένης ἐπὶ τῆς συνοριακῆς γραμμῆς $s + \mu_2 + \omega + \lambda + s_1 + \mu_1$, θὰ ἔχω :

$$(2) \quad \begin{cases} R_x = p\, s + s\, V^2_\infty - s_1 \cos\beta \\ R_y = -\, s_1 \sin\beta \end{cases}$$

Δοθέντος δὲ ὅτι $\beta =$ γωνία τῆς πρὸς τὰ κατάντι ἀσυμπτωτικῆς διευθύνσεως τοῦ ῥεύματος μετὰ τοῦ $+$ ox, οἱ δύο τύποι (2) συνδυάζονται εἰς τὸν κάτωθι μοναδικόν :

$$R = R_x + i R_y = s(p + V^2_\infty) - s_1 e^{i\beta} = s\left[\frac{1}{2} - \frac{V^2_\infty}{2} + V^2_\infty\right] - s_1 e^{i\beta}$$

$$= \frac{s}{2}(1 + V^2_\infty) - s_1 e^{i\beta}$$

Καὶ ἐπειδή : $V_\infty = \frac{s}{s_1}$ θὰ ἔχωμεν :

$$R = R_x + i R_y = \frac{s}{2}\left(1 + \frac{s_1^2}{s^2}\right) - s_1 e^{i\beta}$$

ἥτις σχίζεται εἰς τὰς κάτωθι δύο σχέσεις :

$$\text{(XIV)} \qquad \begin{aligned} R_x &= \frac{s}{2}\left(1 + \frac{s_1^2}{s^2}\right) - s_1 \cos\beta \\ R_y &= - s_1 \sin\beta \end{aligned}$$

Οἱ τύποι (XIV) ἰσοδύναμοι, καίτοι διαφόρου μορφῆς, πρὸς τὸν γενικὸν τύπον (XI) τοῦ Ἀρ. 17, λύουσι τὸ πρόβλημα εὐθὺς ὡς γνωσθῇ ἡ β εἰς ἑκάστην συγκεκριμμένην περίπτωσιν.

Εἰδικὴ περίπτωσις. Διώρυξ μὲ παρειὰς εὐθυγράμμους καὶ παραλλήλους τῷ ox. (σχ. 12). Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ: $s = s_1 \Delta$ καὶ $\beta = 0$. Τὸ ῥεῦμα πρὸς τὸ ἐπ' ∞ κατάντι τείνει νὰ ῥέῃ ἀσυμπτωτικῶς πρὸς τὴν παρειὰν μ_1 δηλ. παραλλήλως τῷ ἄξονι ox, Οἱ τύποι (XIV) γίνονται :

$$R_x = \frac{s}{2}\left(1 + \frac{s_1^2}{s^2}\right) - s_1 = \frac{s}{2} + \frac{s_1^2}{2s} - s_1$$

ἤτοι : $$R_x = \frac{s^2 + s_1^2 - 2 s s_1}{2s} = \frac{(s - s_1)^2}{2s} = \frac{\Delta^2}{2s}$$

καὶ $$R_y = - s_1 \sin\beta = 0$$

Τ. ἔ. ἐπανευρίσκω καὶ πάλιν τοὺς κλασικοὺς τύπους (XII) τοῦ ἀρ. 17

$$\begin{cases} R_x = \dfrac{\Delta^2}{2s} \\ R_y = 0 \end{cases}$$

τοῦθ' ὅπερ ἀποτελεῖ προφανῶς μίαν ἐπαλήθευσιν ἀμοιβαίαν τῶν δύο μεθόδων. Δὲν παραλείπω νὰ ὑπογραμμίσω ὅτι ἐνταῦθα R_x προέρχεται ἐξ ὁλοκλήρου ἐκ τῆς παρειᾶς ω τοῦ στερεοῦ ἐμποδίου καὶ οὐδαμῶς ἐκ τῆς μ_1 ἢ μ_2. Ὥστε R_x εἶναι πράγματι ἡ συνιστῶσα κατὰ ox τῆς γενικῆς συνισταμένης τῶν πιέσεων δηλ. ἡ Ἀντίστασις ἡ προβαλλομένη ὑπὸ τοῦ ἐμποδίου κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ῥεύματος.

20. Ἀντίστασις ἀνηγμένη εἰς τὴν μονάδα τοῦ μήκους. Εἰς τὰς ὑπ' ἀρ' 17 καὶ 19 παραγράφους εὕρομεν διὰ δύο διαφόρων μεθόδων ὅτι ἡ ἀπ' εὐθείας ἀντίστασις ἡ προβαλλομένη ὑπὸ τοῦ στερεοῦ ἐμποδίου σχήματος τυχόντος ἐντὸς διώρυγος μὲ παρειὰς εὐθυγράμμους καὶ παραλλήλους τῷ ox, εἶναι:

$$(1) \qquad R_x = R = \frac{\Delta^2}{2\,s}$$

ἥτις σχέσις, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι $\Delta = \Omega_1 - \Omega_2$ καὶ $\Omega_2 = \Omega_1 V_\infty$ γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$R = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)^2}{2\,s} = \frac{\left(\frac{\Omega_2}{V_\infty} - \Omega_2\right)^2}{2\,\Omega_1} = \frac{\Omega_2^2\left(\frac{1}{V_\infty} - 1\right)^2}{2\,\Omega_1}$$

ἤτοι $$R = \frac{\Omega_2^2\left(\frac{1}{V^2_\infty} - \frac{2}{V_\infty} + 1\right)}{2\Omega_1} = \frac{\Omega_2^2}{2\Omega_1}\,\frac{1}{V_\infty}\,(1 - 2V_\infty + V^2_\infty)$$

$$= \frac{\Omega_1^2 V^2_\infty}{2\Omega_1 V^2_\infty}\,(1 - V^2_\infty) = \frac{\Omega_1}{2}\,(1 - V_\infty)^2$$

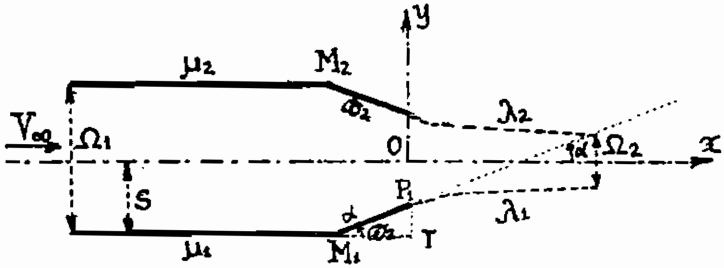
καὶ τελικῶς: $$R = \frac{\Omega_2}{2V_\infty}\,(1 - V_\infty)^2 \qquad (2)$$

Ἀλλ' ὁ γενικὸς πρωτότυπος τύπος (1) ὡς καὶ ἡ σχέσις (2) ἐξηγμένη ἐκ τῆς (1) ἥτις θέτει εἰς φῶς τὴν κινητικὴν κατάστασιν τοῦ ῥευστοῦ δὲν εἶναι πρακτικῶς χρησιμοποιήσιμοι, διότι τόσον τὸ ἀσυμπτωτικὸν εὖρος Δ τοῦ διακένου ὅσον καὶ τὸ ἀσυμπτωτικὸν πλάτος Ω_2 τοῦ συσταλέντος νήματος, εἶναι ἄγνωστα. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον προτίθεμαι νὰ εὕρω τύπον δίδοντα τὴν εἰς τὴν μονάδα τοῦ μήκους ἀνηγμένην ἀντίστασιν συναρτήσει τῶν μόνων δεδομένων τοῦ προβλήματος Ω_1 καὶ q^1 ἢ ὅπερ τὸ αὐτὸ τῆς V_∞

Πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον, θεωρῶ καὶ πάλιν διώρυγα μὲ παρειὰς εὐθυγράμμους καὶ παραλλήλους τῷ ox, μὲ ἐμπόδιον λεπτὸν καὶ εὐθύγραμμον ὑπὸ τυχοῦσαν γωνίαν α (σχ. 15) καὶ θὰ ζητήσω νὰ ὑπολογίσω τὴν Ἀντίστασιν τοῦ εὐθυγράμμου τούτου ἐμποδίου ἀνηγμένην εἰς τὴν μονάδα τοῦ μήκους δηλ. τὸν λόγον $\frac{R}{l}$, ἔνθα l εἶναι τὸ μῆκος $P_1 T$ (κάθετος προβολὴ) $= \varpi_1 \sin\alpha$. Ἤτοι ζητῶ νὰ ὑπολογίσω:

$$\frac{R}{l} = \frac{R}{\varpi_1 \sin\alpha} = ;$$

Ὑπολογίζω ἐν πρώτοις τὸ μῆκος ϖ_1 τῆς παρειᾶς τοῦ ἐμποδίου διὰ



σχ. 15.

τοῦ τύπου (VIIα) τοῦ ἀρ. 10, ἤτοι:

$$\varpi_1 = \frac{q}{\pi} \int_{\sigma=\pi}^{\sigma=\sigma} e^{-\tau} \operatorname{tg}\sigma \, d\sigma$$

ὅστις τύπος, διὰ νὰ δίδῃ τὸ ὁλικὸν μῆκος ϖ_1 δέον νὰ γραφῇ:

$$\varpi_1 = \frac{q}{\pi} \int_{\pi}^{\sigma 1} e^{-\tau} \operatorname{tg}\sigma \, d\sigma$$

ἢ ἀκόμη, δι' ἀλλαγῆς τοῦ κάτω ὁρίου ἀπὸ π εἰς 0 (ὅπερ ἰσοδυναμεῖ πρὸς ἀπεικόνισιν τῆς ϖ_1 ἐπὶ τοῦ τόξου (+ 1, M'_2) τοῦ σχ. 8, ἄνευ ἀλλοιώσεως τοῦ ἀποτελέσματος δοθέντος ὅτι πρόκειται περὶ μετρικῆς ἰδιότητος).

$$(3) \qquad \varpi_1 = \frac{q}{\pi} \int_{0}^{\sigma 1} e^{-\tau} \operatorname{tg}\sigma \, d\sigma$$

εἰς τὸν ὁποῖον τύπον σ_1 εἶναι τὸ ὄρισμα τῆς χαρακτηριστικῆς σταθερᾶς τοῦ προβλήματος (βλ. ἀρ. 14).

Ἄς ὑπολογίσωμεν ἐν πρώτοις $e^{-\tau}$. Πρὸς τοῦτο, ὑπενθυμίζω ὅτι ἐπὶ τῆς περιφερείας $|\zeta|=1$, $\eta\geq 0$ ἔχω: $\zeta = e^{i\sigma}$ καὶ $\zeta_1 = e^{i\sigma_1}$. Συνεπῶς ἡ συνάρτησις $\omega(\zeta)$ τὴν ὁποίαν προσδιώρισα εἰς τὸν ἀρ. 14, λαμβάνει τὴν τὴν κάτωθι μορφήν:

$$\omega(\zeta) = \frac{i\alpha}{\pi} \operatorname{Log.} \frac{(\zeta_1-\zeta)(1+\zeta_1\zeta)}{(\zeta_1+\zeta)(1-\zeta_1\zeta)} = \frac{i\alpha}{\pi} \operatorname{Log} \left\{ \frac{e^{i\sigma_1}-e^{i\sigma}}{e^{i\sigma_1}+e^{i\sigma}} \cdot \frac{1+e^{i(\sigma_1+\sigma)}}{1-e^{i(\sigma_1+\sigma)}} \right\}$$

$$= \frac{i\alpha}{\pi} \operatorname{Log.} \left\{ \frac{\sin\frac{\sigma_1-\sigma}{2}}{\sin\frac{\sigma_1+\sigma}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{\sigma_1+\sigma}{2}}{\cos\frac{\sigma_1-\sigma}{2}} \right\} = \frac{i\alpha}{\pi} \operatorname{Log} \left[\frac{\operatorname{tg}\frac{\sigma_1-\sigma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\sigma_1+\sigma}{2}} \right]$$

καὶ ἐπειδὴ $\omega(\zeta) = \vartheta + i\tau$, προκύπτει:

$$\tau = \frac{\alpha}{\pi} \operatorname{Log.} \frac{\operatorname{tg}\frac{\sigma_1-\sigma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\sigma_1+\sigma}{2}} \qquad (0<\sigma<\sigma_1)$$

καὶ συνεπῶς:

$$V = e^{\tau} = \left[\frac{\operatorname{tg}\frac{\sigma_1-\sigma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\sigma_1+\sigma}{2}} \right]^{\frac{\alpha}{\pi}} = \left(\frac{\sin\sigma_1 - \sin\sigma}{\sin\sigma_1 + \sin\sigma} \right)^{\frac{\alpha}{\pi}}$$

ἤτοι τελικῶς:

$$e^{-\tau} = \frac{1}{e^{\tau}} = \left(\frac{\sin\sigma_1 - \sin\sigma}{\sin\sigma_1 + \sin\sigma} \right)^{-\frac{\alpha}{\pi}}$$

Ὁ τύπος (3) λαμβάνει τότε τὴν μορφήν:

$$\varpi_1 = \frac{q}{\pi} \int_0^{\sigma_1} \left(\frac{\sin\sigma_1 - \sin\sigma}{\sin\sigma_1 + \sin\sigma} \right)^{-\frac{\alpha}{\pi}} \operatorname{tg}\sigma \, d\sigma$$

Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ὁλοκληρώματος:

$$J = \int_0^{\sigma} \left(\frac{\sin\sigma_1 - \sin\sigma}{\sin\sigma_1 + \sin\sigma} \right)^{\frac{\alpha}{\pi}} \operatorname{tg}\sigma \, d\sigma$$

θὰ ἀκολουθήσω, μὲ ἐλαφράς τινας τροποποιήσεις, τὴν εἰς ἀνάλογον περίπτωσιν ἐφαρμοσθεῖσαν μέθοδον ὑπὸ τοῦ κ. U. Cisotti.

Θέτω :

$$\frac{\sin\sigma_1 - \sin\sigma}{\sin\sigma_1 + \sin\sigma} = t$$

ἐξ οὗ :

$$\sin\sigma = \frac{1-t}{1+t}\sin\sigma_1$$

καὶ :

$$d\ \sin\sigma = \cos\sigma .\ d\sigma = -\,2\ \sin\sigma_1 \frac{dt}{(1+t)^2}$$

Τὸ ὑπολογιστέον ὁλοκλήρωμα γίνεται τότε :

$$(2) \qquad J = 2.\ \sin^2\sigma_1 \int_0^1 t^{-\frac{\alpha}{\pi}} \frac{(1-t)\ dt}{(1+t)\left[(1+t)^2-(1-t)^2\sin^2\sigma_1\right]}$$

Λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς κάτωθι εὐχερῶς ἐπαληθευομένης ταυτότητος :

$$(1+t)^2-(1-t)^2\sin^2\sigma_1=(1\mp\sin\sigma_1)^2\left(\frac{1-\sin\sigma_1}{1+\sin\sigma_1}+t\right)\left(1+\frac{1-\sin\sigma_1}{1+\sin\sigma_1}\ t\right)$$

ὡς καὶ τοῦ μετασχηματισμοῦ :

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sigma_1}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sigma_1}{2}\right)} = \frac{1-\sin\sigma_1}{1+\sin\sigma_1} = V_{\infty}^{\frac{\pi}{\alpha}} = \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}$$

ἡ σχέσις (2) γράφεται μετ' ἀντικατάστασιν :

$$J = \frac{1}{2}\left(1\ \ V^{\frac{\pi}{\alpha}}{}_{+}\right)^2 \int_0^1 t^{-\frac{\alpha}{\pi}} \frac{1-t}{1+t} \frac{dt}{\left(V^{\frac{\pi}{\alpha}}{}_{\infty}+t\right)\left(1+V^{\frac{\pi}{\alpha}}{}_{\infty}\right)}$$

καὶ ἐπειδὴ :

$$\frac{1-t}{\left(V^{\frac{\pi}{\alpha}}+t\right)\ \left(1+V^{\frac{\pi}{\alpha}}{}_{\infty}t\right)\ \left(1+t\right)} = \frac{1}{1+V^{\frac{\pi}{\alpha}}{}_{\infty}} \left\{\frac{V^{-\frac{\pi}{\alpha}}{}_{+}}{1+V^{\frac{\pi}{\alpha}}{}_{\infty}} + \frac{V^{\frac{\pi}{\alpha}}{}_{+}}{1+V^{\frac{\pi}{\alpha}}{}_{\infty}t} - \frac{2}{1+t}\right\}$$

λαμβάνομεν τελικῶς :

$$J = \int_0^1 t^{-\frac{\alpha}{\pi}} \left[\frac{-2}{1+t} + \frac{V^{\frac{-\pi}{\alpha}}_{\infty}}{1 + V^{\frac{\pi}{\alpha}}_{\infty}} + \frac{V^{\frac{\pi}{\alpha}}_{\infty}}{1 + V^{\frac{-\alpha}{\pi}}_{\infty}\, t} \right]. \, dt$$

Τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ἁπλῶς διὰ τῶν συναρτήσεων τοῦ Stirling (Nielsen, Handbuch der Théorie der Gammafunction).

$$f\ (x) = \int_0^1 \frac{\omega t^{x-1}}{\omega t - 1}\, dt = \sum_0^{\infty}{}_s \frac{s'.}{x\,(x+1).......(x+s)} \left(\frac{\omega}{\omega - 1}\right)^{s+1}$$

ἔνθα ω = τυχοῦσα σταθερά,

Εἰς τὴν περίπτωσίν μας ἔχομεν :

Διὰ $\omega = -1$ $\qquad \beta\ (x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{t+1}\, dt$

Διὰ $\omega = -V^{\frac{-\pi}{\alpha}}_{\infty}$ $\qquad f_1\ (x) = \int_0^1 \frac{V^{\frac{-\pi}{\alpha}} + t^{x-1}}{1 + V^{\frac{-\pi}{\alpha}}_{\infty}\, t}\, dt$

Διὰ $\omega = -\ V^{\frac{\pi}{\alpha}}_{\infty}$ $\qquad f_2\ (x) = \int_0^1 \frac{V^{\frac{\pi}{\alpha}}_{\infty} .\, t^{x-1}}{1 + V_{\infty}^{\frac{\pi}{\alpha}} + .t}\, dt$

καὶ τὸ ὑπολογιστέον ὁλοκλήρωμα γίνεται :

$$J = \frac{1}{2} \left\{ f_1 \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) + f_2 \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) - 2\,\beta \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) \right\}$$

Συνεπῶς τὸ μῆκος ϖ_1 τῆς παρειᾶς τοῦ ἐμποδίου γίνεται :

$$(3) \qquad \varpi_1 = \frac{q}{2\pi} \left\{ f_1 \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) + f_2 \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) - 2\,\beta \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) \right\}$$

Καὶ ἡ ἀντίστασις τοῦ ἐμποδίου ἀνηγμένη εἰς τὴν μονάδα μήκους εἶναι :

$$(XV) \quad \frac{R}{l} = \frac{\Omega_2}{2V+} . \frac{(1 - V_{\infty})^2}{\varpi_1 \sin\alpha} = \frac{\pi\,(1 - V_{\infty})^2}{V + \sin\alpha} . \frac{1}{\left[f_1\left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) + f_2\left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) - 2\beta \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)\right]}$$

Ὁ τύπος (XV) λύει ἐν ὅλῃ τῇ γενικότητι τὸ πρόβλημα. Ἡ ἐφαρμογὴ αὐτοῦ διὰ δοθεῖσαν τιμὴν τῆς γωνίας α οὐδεμίαν δυσχέρειαν παρουσιάζει.

Εἰδικὴ περίπτωσις. Εὐθύγραμμον ἐμπόδιον κάθετον τῷ ῥεύματι. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην $\alpha = \frac{\pi}{\alpha}$ καὶ $1 - \frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{2}$

θέτω $$\omega = - V^{\frac{\pi}{\alpha}}{}_{\infty} = - V^2{}_{\infty} = - u$$

ὁπότε: $$V^{-\frac{\pi}{\alpha}}{}_{\infty} = - V^{-2}{}_{\infty} = \frac{1}{-V^2{}_{\infty}} = - \frac{1}{u}$$

Ἐκτελῶ τὸν μετασχηματισμόν: $t = \frac{1}{\vartheta^2}$. Αἱ τρεῖς ὡς ἄνω συναρτήσεις $\beta(x)$, $f_1(x)$ καὶ $f_2(x)$ δίδουσι:

$$\beta\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{2}}dt}{1+t} = 2.\int_1^{\infty} \frac{d\vartheta}{1+\vartheta^2} = 2\left[\text{arc tg}\vartheta\right]_1^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

$$f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{V^{-\frac{\pi}{\alpha}}{}_{\infty}\, t}{1+V^{-\frac{\pi}{\alpha}}{}_{\infty} t}\, dt = \int_1^{\infty} \frac{2u d\vartheta}{u+\vartheta^2} = 2\sqrt{u}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tg}\frac{1}{\sqrt{u}}\right)$$

$$f_2\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{V^{+\frac{\pi}{\alpha}}{}_{\infty}\, t}{1+V^{-\frac{\pi}{\alpha}}{}_{\infty} t}\, dt = \int_1^{\infty} \frac{2.d\vartheta}{u\vartheta^2+1} = \frac{2}{\sqrt{u}}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tg}\sqrt{u}\right)$$

Ἐπειδὴ δὲ $\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, θὰ ἔχω:

$$\frac{R}{1} = \frac{\pi(1-\sqrt{u})^2}{2\sqrt{u}\left[\pi\left(\sqrt{u}+\frac{1}{\sqrt{u}}-1\right) - 2\sqrt{u}\ \text{arc tg}\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{2}{\sqrt{u}}\ \text{arc tg}\sqrt{u}\right]}$$

$$= \frac{\pi(1-\sqrt{u})^2}{2\left[\pi(u+1-\sqrt{u}) - 2u.\ \text{arc tg}\frac{1}{\sqrt{u}} - 2\text{arc tg}\sqrt{u}\right]}$$

Ἀλλ' ὡς γνωστὸν $\text{arc tg}\frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{\pi}{2} - \text{arc tg}\sqrt{u}$, συνεπῶς ἔχω:

$$\frac{R}{l} = \frac{\pi\left(1-\sqrt{u}\right)^2}{2\left[\pi\left(1-\sqrt{u}\right) + 2\,u \text{ arc. tg}\sqrt{u} - 2\text{arc. tg}\sqrt{u}\right]}$$

Διαιρῶν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν διὰ $1-\sqrt{u}$, λαμβάνω

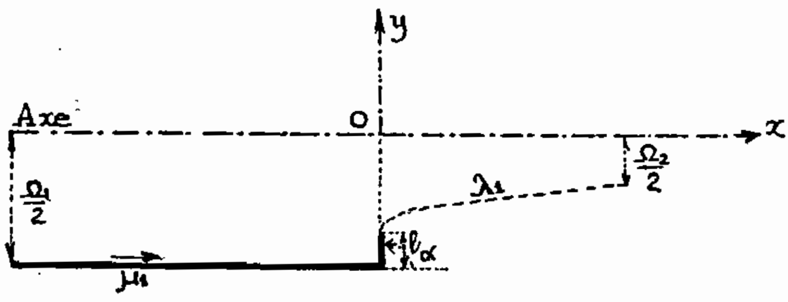
$$\frac{R}{l} = \frac{\pi\left(1-\sqrt{u}\right)}{2\left[\pi-2\left(1+\sqrt{u}\right).\text{arc. tg}\sqrt{u}\right]}$$

Ἢ ἀκόμη, κατόπιν ἀντικαταστάσεως τοῦ u ὑπὸ τῆς τιμῆς του V^2_∞, λαμβάνω τελικῶς:

$$\text{(XVI)} \qquad \frac{R}{l} = \frac{\pi\,(1-V_\infty)}{2\,[\pi-2\,(1+V_\infty).\text{arc. tg } V_\infty]}$$

ὅστις εἶναι ὁ ζητούμενος τύπος, δίδων τὴν εἰς τὴν μονάδα μήκους ἀνηγμένην ἀντίστασιν τοῦ εὐθυγράμμου — λεπτοῦ ἐμποδίου, ὅταν τοῦτο εἶναι κάθετον τῷ ῥεύματι. (σχ. 16).

Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι τὸ πλάτος Ω_1 τῆς διώρυγος τείνει πρὸς τὸ ∞,



Σχ. 16

εἶναι φανερὸν ὅτι Ω_2 τείνει ἐπίσης πρὸς τὸ ∞, καὶ ὁ λόγος $\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = V_\infty$ τείνει προφανῶς πρὸς 1. Τὸ ΙΙον μέλος τοῦ τύπου (XV) διὰ $V_\infty = 1$ λαμβάνει τὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν $\frac{0}{0}$. Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ κανόνος τοῦ L'Hospital εὑρίσκω εἰς τὸ ὅριον:

$$\frac{R}{\;} = \left\{\frac{-\pi}{2\left[\frac{-2}{1+V^2_\infty} - \frac{2V_\infty}{1+V^2_\infty} - 2\text{arc. tg } V_\infty\right]}\right\} = \frac{\pi}{2\left(1+1+\frac{\pi}{2}\right)}$$

δηλαδή :

$$\frac{R}{l} = \frac{\pi}{\pi+4}$$

ὅστις εἶναι ὁ γνωστὸς κλασικὸς τύπος τοῦ Lord Rayleigh δίδων τὴν εἰς τὴν μονάδα τοῦ μήκους ἀνηγμένην ἀντίστασιν τοῦ λεπτοῦ - εὐθυγράμμου ἐμποδίου καθέτου εἰς τὴν κατεύθυνσιν ῥεύματος ἀπεριορίστως πανταχόθεν ἐκτεινομένου.

ΜΕΡΟΣ V

ΟΡΙΑΚΑΙ ΚΑΙ ΕΙΔΙΚΑΙ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ. ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ.

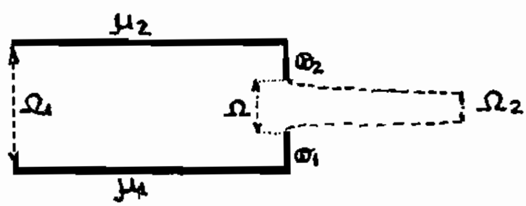
21. Συστολὴ τοῦ ὑγροῦ νήματος. Τοῦ προβλήματός μας μετατοπισθέντος — καθ' ἃ ἐξετέθη εἰς τὴν ὑπ' ἀρ. 5 παράγραφον — εἰς τὸ τοῦ ὑγροῦ νήματος, εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ πλάτος Ω_2 τοῦ ῥεύματος εἰς τὸ ἐπ' ∞ κατάντι εἶναι τὸ «συσταλὲν νῆμα», εἰς τὸ ἐπ' ∞ κατάντι. Εἶναι ὅθεν ἐνδιαφέρον νὰ γνωρίσωμεν τὸ μέγεθος τοῦτο Ω_2, ἢ ὅπερ τὸ αὐτὸ τὸν συντελεστήν :

$$\Gamma = \frac{\Omega_2}{\Omega}$$

καλούμενον «συντελεστὴν συστολῆς», ἔνθα Ω εἶναι τὸ εὖρος τῆς διώρυγος εἰς τὸ χεῖλος τοῦ ἐμποδίου (δεδομένον τοῦ προβλήματος, βλ. λ.χ. σχ. 15). Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ συντελεστοῦ Γ ἔχει γίνῃ παρὰ τοῦ κ. U. Cisotti («Vene fluenti» Rendiconti del circolo Matematico di Palermo, 1908) καὶ δίδει :

$$(1) \qquad \Gamma = \frac{\Omega_2}{\Omega} = \frac{1}{1 + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_2} - \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right) \operatorname{arc\,tg} \frac{\Omega_2}{\Omega_1}}$$

διὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ εὐθυγράμμου ἐμποδίου καθέτου τῷ ῥεύματι (σχ. 17).



Σχ. 17.

Ὅταν τὸ πλάτος Ω_1 τῆς διώρυγος τείνῃ πρὸς τὸ ∞ (σχ. 18), τὸ γινόμενον

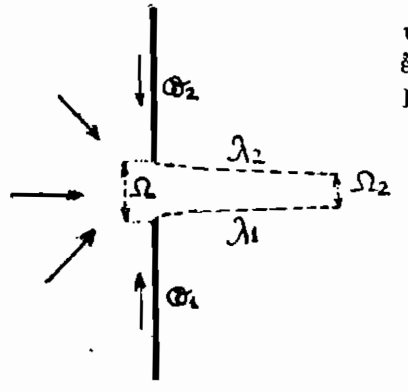
$$(2) \qquad \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \operatorname{arc\,tg} \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$$

λαμβάνει τὴν τιμήν :

$$\left[\frac{\Omega_1}{\Omega_2} \operatorname{arc\,tg} \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right]_{\Omega_1 \to \infty} = \infty . 0$$

Τὴν ἀπροσδιοριστίαν ταύτην αἴρω γράφων : $\left[\frac{\Omega_1}{\Omega_2} \text{arc tg} \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right]_{\Omega_1 \to \infty} =$

$$= \left[\frac{\frac{\Omega_1}{\Omega_2}\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \text{arc tg} \frac{\Omega_2}{\Omega_1}}{\frac{\Omega_2}{\Omega_1}}\right]_{\Omega_1 \to \infty} = \left[\frac{\text{arc tg} \frac{\Omega_2}{\Omega_1}}{\frac{\Omega_2}{\Omega_1}}\right]_{\Omega_1 \to \infty} = \frac{0}{0}$$



τὴν ὁποίαν πάλιν ἀπροσδιοριστίαν αἴρω ἐν τέλει δι᾽ ἐφαρμογῆς τοῦ κανόνος τοῦ L᾽ Hospital :

$$\frac{-\frac{\Omega_2}{\Omega_1^2}}{1-\frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2}} \cdot \frac{1}{-\frac{\Omega_2}{\Omega_1}} = \left[\frac{1}{1+\frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2}}\right]_{\Omega_1 \to \infty} = 1$$

Σχ. 18.

Οὕτω ἡ πραγματικὴ τιμὴ τοῦ γινομένου (2) εἶναι $= 1$, ὁ δὲ τύπος (1) λαμβάνει τὴν ἁπλουστάτην μορφήν :

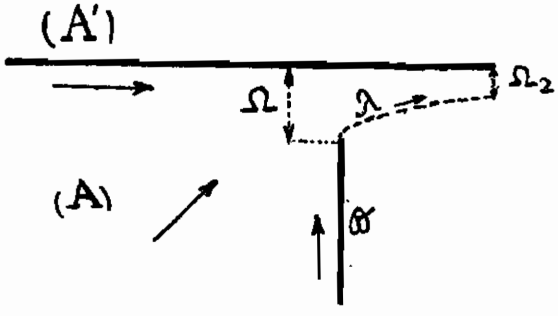
$$\Omega_2 = \frac{\pi}{\pi+2}\,\Omega$$

ἤτοι $\quad \Gamma = \frac{\pi}{\pi+2}$

ὅστις εἶναι ὁ γνωστὸς τύπος τοῦ Kirchoff.

Δυνάμει τῆς ἀρχῆς τῶν εἰδώλων (βλ. ἀρ. 5), ἡ κίνησις τοῦ ῥευστοῦ οὐδόλως ἀλλοιοῦται ἐὰν ἐπαναφέρω τὴν στερεὰν παρειὰν κατὰ τὸν ἄξονα μ (σχ. 19), καταργῶν τὴν περιοχὴν (A)′ τοῦ ῥευστοῦ. Ὅλοι οἱ προηγούμενοι ὑπολογισμοὶ μένουν ἀμετάβλητοι καὶ ὁ ὑπολογισμὸς εἰς τὸ ὅριον ἐπίσης. Κατὰ συνέπειαν ὁ συντελεστὴς συστολῆς εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ σχ. 19. εἶναι ἀκόμη :

$$\Gamma = \frac{\Omega_2}{\Omega} = \frac{\pi}{\pi+2} \simeq 0{,}62$$



Σχ. 19.

Δύναμαι ὅθεν νὰ εἴπω ὅτι ἐν τῇ πρακτικῇ ἐὰν τὸ ἄνοιγμα Ω τοῦ ῥεύματος εἶναι πολὺ μικρὸν ἐν σχέσει πρὸς τὸ μῆκος τοῦ ἐμποδίου, δύναται νὰ ληφθῇ, εἰς πρώτην προσέγγισιν

$$\Gamma = 0{,}62$$

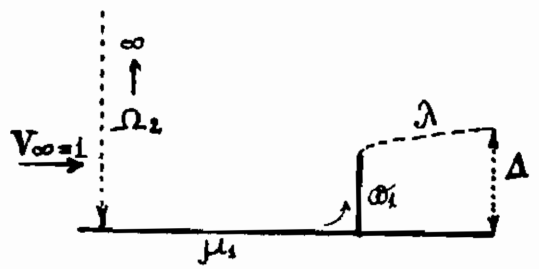
δηλ. νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀσυμπτωτικὸν εὖρος τοῦ ῥεύματος εἰς τὸ ἐπ' ∞ κατάντι, διὰ τοῦ τύπου

$$\Omega_2 \simeq 0{,}62\ \Omega.$$

22. Παρατηρήσεις ἐπὶ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀρχῆς τῶν εἰδώλων. Εἰς τὴν ὑπ' ἀρ. 26 παράγραφον εὕρομεν ὅτι ἡ Ἀντίστασις τοῦ καθέτου τῷ ῥεύματι ἐμποδίου, ἀνηγμένη εἰς τὴν μονάδα τοῦ μήκους εἶναι :

$$(1) \qquad \frac{R}{l} = \frac{\pi\,(1 - V_\infty)}{2\,[\pi - 2\,(1 + V_\infty)\ \text{arc tg}\ V_\infty]}$$

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ παρειὰ μ_1 τῆς διώρυγος μένει ἀμετακίνητος καὶ ὅτι ἡ παρειὰ μ_2 ἀπομακρύνεται ἀπεριορίστως δηλ. ἡ Ω_1 τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ Ω_2 τείνει ἐπίσης πρὸς τὸ ∞ καὶ εἶναι προφανὲς ὅτι ὁ λόγος $\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = V_\infty$ τείνει πρὸς 1 (σχ. 20). Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἐμποδίου θὰ εἶναι τὸ ὅριον τοῦ 2ου μέλους τῆς (1), ὅπερ συμφώνως τῷ ὑπολογισμῷ



Σχ. 20.

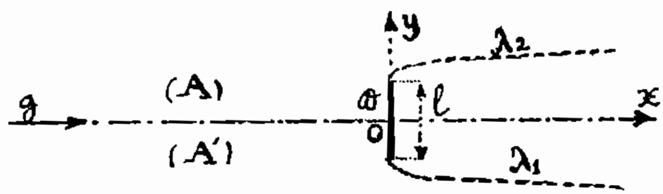
ἀρ 20, εἶναι ἴσον πρός : $\qquad \frac{R}{l} = \frac{\pi}{\pi+4}$

Τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο ἑρμηνεύεται ὡς ἑξῆς: Ἡ ἀντίστασις ἡ ἀνηγμένη εἰς τὴν μονάδα τοῦ μήκους εὐθυγρ. ἐμποδίου καθέτου τῷ ῥεύματι, ὅπερ ῥεῦμα κινεῖται παραλλήλως πρὸς εὐθύγραμμον τοῖχον καὶ ἐκτείνεται ἀπεριορίστως πρὸς ἓν μέρος τοῦ τοίχου, εἶναι ἡ αὐτὴ ὡς ἐὰν τὸ ῥευστὸν ἐξετείνετο ἀπεριορίστως πρὸς ὅλας τὰς κατευθύνσεις, δηλ. ἡ αὐτὴ ὡς ἐὰν ἡ παρειὰ μ₁ δὲν ὑπῆρχεν.»

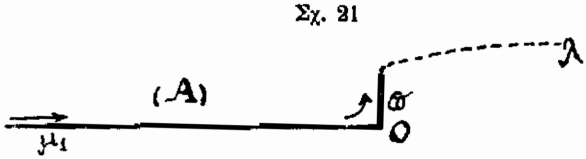
Ἀποτελεῖ ἓν θεώρημα τοῦ Καθ. κ. H. Villat (Fluide limité par une paroi fixe» Βλ. λ. χ. «Aperçus théoriques sur la Résistance des Fluides» par H. Villat, 1920. σελ. 90—92), λίαν ἀξιόλογον, κατ' ἔκφρασιν τοῦ ἰδίου, ἰσχύον μόνον διὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ καθέτου τῷ ῥεύματι ἐμποδίου καὶ οὐχὶ δι' οἱανδήποτε κλίσιν τοῦ ἐμποδίου.

Δύναμαι ἄλλωστε νὰ ἐπανεύρω τὸ θεώρημα τοῦτο ταχύτητα καὶ ἁπλούστατα, ἐφαρμόζων τὴν ἀρχὴν τῶν εἰδώλων, διὰ τοῦ κάτωθι συλλογισμοῦ.

Θεωρῶ εὐθύγραμμον ἐμπόδιον μήκους l τοποθετημένον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ῥευστοῦ ἀπεριορίστως πανταχόθεν ἐκτεινομένου, κάθετον εἰς τὴν κατεύθυνσιν τοῦ ῥεύματος. Ὑγρόν τι νῆμα g παράλληλον τῷ ἄξονι ox (κατεύθυσις τοῦ ῥεύματος), προσκρούει ἐπὶ τῆς παρειᾶς ϖ εἰς τὸ νεκρὸν σημεῖον O. Αἱ ταχύτητες -διανύσματα τῶν ῥευστῶν στοιχείων τοῦ νήματος g κεῖνται βεβαίως ἐπὶ τῆς g ἥτις οὕτω ἀποτελεῖ γραμμὴν ῥεύματος. Ἡ κίνησις εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὴν γραμμὴν gx. Ἡ γραμμὴ αὕτη χωρίζει τὸ ῥευστὸν εἰς δύο διακεκριμμένας περιοχὰς (A) καὶ (A'), ἑκατέρα τῶν ὁποίων ἔχει ἰδίαν κίνησιν τοιαύτην ὥστε οὐδὲν τῶν ῥευστῶν στοιχείων τῆς (A) νὰ διαπερᾷ τὴν χωριστικὴν γραμμὴν gx, οὔτε τῆς (A'). Ἐν ἄλλαις λέξεσιν ἡ κίνησις τῆς (A) εἶναι ἡ εἰκὼν τῆς κινήσεως τῆς (A') ὡς πρὸς τὴν γραμμὴν gx. Ἕπεται ὅθεν—κατὰ τὴν ἀρχὴν τῶν εἰδώλων—ὅτι δύναμαι, χωρὶς νὰ ἀλλοιώσω τὴν κίνησιν τῆς περιοχῆς (A), νὰ καταργήσω τὸ ῥευστὸν (A'), ὑπὸ τὸν ὅρον νὰ πραγματοποιήσω ὑλικῶς τὴν χωριστικὴν γραμμὴν gx, ὑπὸ μορφὴν στερεοῦ διαφράγματος, καὶ φθάνω οὕτω εἰς τὴν περίπτωσιν (σχ. 22) τοῦ εὐθυγράμμου τοί-



Σχ. 21



Σχ. 22

χου μὲ κάθετον ἐμπόδιον. Γνωρίζω ὅμως ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ σχ. 21, ἡ Ἀντίστασις ἀνηγμένη εἰς τὴν μονάδα τοῦ μήκους δίδεται ὑπὸ τοῦ κλασικοῦ τύπου τοῦ Lord Rayleigh $\frac{R_x}{l} = \frac{\pi}{\pi + 4}$, ἕπεται ἄρα ὅτι διὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ σχ. 22, ἡ Ἀντίστασις θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ τύπου, ἀφοῦ ἡ κίνησις εἶναι ἡ αὐτή, καὶ τὸ θεώρημα τοῦ κ. H. Villat εὑρίσκεται καὶ οὕτω ἀποδεδειγμένον.

23. Ἐπάνοδος εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς ῥοῆς. Διὰ τῆς παρούσης μελέτης εὗρον τὴν ἔκφρασιν τῶν κυριωτέρων στοιχείων τῆς κινήσεως ἐν τῷ εἰκονικῷ μιγαδικῷ ἐπιπέδῳ $\zeta = \xi + i\eta$. Εἰδικώτερον γνωρίζω τὸ Μιγαδικὸν Δυναμικὸν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ζ (βλ. τύπον I, ἀριθ. 8).

$$(\alpha) \qquad f(\zeta) = iq + \frac{q}{\pi} \text{ Log. } \left[\frac{\zeta^2+1}{2\zeta}\right]$$

Διὰ νὰ ἀνέλθω εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς πραγματικῆς ῥοῆς εἶναι ἐπάναγκες νὰ γνωρίζω τὴν σχέσιν $z = z(\zeta)$ ἥτις ἐκφράζει τὴν σύμμορφον καὶ κατὰ τρόπον διπλῶς μονότιμον ἀπεικόνισιν μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων z καὶ ζ. Ἡ σχέσις αὕτη, εἶναι ὡς γνωστὸν ἡ Γενικὴ λύσις (τύπος V, ἀριθ. 9).

$$z - z_1 = \frac{q}{\pi} \int_{-1}^{\zeta} e^{i\omega} \frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

ἢ ἐὰν ἀναφερθῶ εἰς τὴν παρειὰν ϖ_2

$$(1) \qquad z - z_2 = \frac{\pi}{q} \int_{+1}^{\zeta} e^{i\omega} \frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

ἥτις σχέσις, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι

$$\omega = \frac{i\alpha}{\pi} \text{ Log } \frac{(\zeta_1-\zeta)\ (1+\zeta_1\zeta)}{(\zeta_1+\zeta)\ (1-\zeta_1\zeta)}$$

γράφεται :

$$(2) \qquad z - z_2 = \frac{q}{\pi} \int_{1}^{\zeta} e^{-\frac{\alpha}{\pi} \text{ Log. } \frac{(\zeta_1-\zeta)\ (1+\zeta_1\zeta)}{(\zeta_1+\zeta)\ (1-\zeta_1\zeta)}} \cdot \frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta}$$

καὶ ἐπειδή :

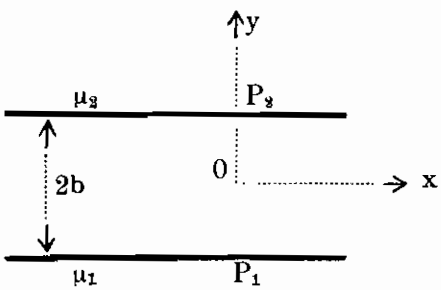
$$e^{-\frac{\alpha}{\pi}\,\mathrm{Log.}\,\frac{(\zeta_1-\zeta)\,(1+\zeta_1\zeta)}{(\zeta_1+\zeta)\,(1-\zeta_1\zeta)}} = \mathrm{Log.}\left[\frac{(\zeta_1+\zeta)}{(\zeta_1-\zeta)}\,\frac{(1-\zeta_1\zeta)}{(1+\zeta_1\zeta)}\right]^{\frac{\alpha}{\pi}}$$

ἡ σχέσις (2) γράφεται :

$$(3) \qquad z - z_2 = \frac{q}{\pi}\int_1^{\zeta}\left[\frac{(\zeta_1+\zeta)\,(1-\zeta_1\zeta)}{(\zeta_1+\zeta)\,(1+\zeta_1\zeta)}\right]^{\frac{\alpha}{\pi}} \cdot \frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta}$$

Ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις εἶναι ἀλγεβρική. Δὲν εἶναι δυνατὸς ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ὁλοκληρώματος τούτου, εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ α εἶναι τυχόν, διὰ πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδῶν συναρτήσεων. Ὑπάρχουσιν οὐχ ἧττον εἰδικαὶ περιπτώσεις καθ' ἃς τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο δύναται νὰ ὑπολογισθῇ λ.χ. διὰ $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Ι. Περίπτωσις. α = ο δηλ. οὐδὲν ἐμπόδιον ὑπάρχει ἐντὸς τῆς διώρυγος. Ἂς ἀναζητήσωμεν τὴν ἀντίστοιχον ὑδροδυναμικὴν λύσιν. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην (σχ. 20), ἡ σχέσις (3) γράφεται :



Σχ. 20

$$z - z_2 = \frac{q}{\pi}\int_1^{\zeta}\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta}$$

ἢ

$$z - z_2 = \frac{q}{\pi}\int_1^{\zeta}\frac{2\zeta.d\zeta}{\zeta^2+1} - \frac{q}{\pi}\int_1^{\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

ἤτοι τελικῶς : $\qquad z - z_2 = \frac{q}{\pi}\,\mathrm{Log.}\,\frac{\zeta^2+1}{2\zeta}$

Ἡ σχέσις (α) γράφεται τότε :

$$f(z) = iq + (z - z_2) = iq + x + iy - x_2 - ib$$

ἢ ἀκόμη :

$$(A) \qquad f(z) = i\,(q + y - b) + x$$

ἥτις εἶναι τὸ μιγαδικὸν δυναμικὸν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ z. Ἡ σχέσις (A) δίδει:

$$(B) \qquad \begin{aligned} \varphi(z) &= x \\ \psi(z) &= q - b + y \end{aligned}$$

Τοιουτοτρόπως τὸ δυναμικὸν τῶν ταχυτήτων εἶναι x, καὶ ἡ συνάρτησις τοῦ ῥεύματος εἶναι $q-b+y$. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι

$$u=\frac{\delta\varphi}{\delta x}=1$$

$$v=\frac{\delta\varphi}{\delta y}=0 \quad \cdot$$

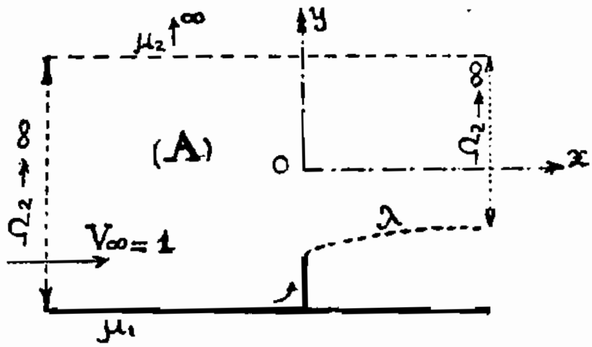
διὰ πᾶσαν τιμὴν τῶν x καὶ y, δηλ. ἡ ταχύτης ὅλων τῶν μορίων εἶναι ἡ αὐτὴ καὶ παντοῦ ἴση μὲ 1.

Αἱ γραμμαὶ ῥεύματος ἔχουσιν ὡς ἐξίσωσιν $q-b+y=c^{te}$

$$\text{δηλ. } y=c^{te}$$

ἤτοι αὗται εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι τῷ ἄξονι ox. Διαπιστώνω ὅτι διὰ $y=b$, ἔχω: $\psi=1$ (γραμμὴ μ_2), καὶ ὅτι διὰ $y=-b$ ἔχω: $\psi=0$. Αἱ γραμμαὶ ἴσου δυναμικοῦ ἔχουν ὡς ἐξίσωσιν $x=c^{te}$ δηλ. εἶναι εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ῥεύματος. Οὕτω βλέπομεν ὅτι τὸ ῥευστὸν κινεῖται μεταφορικῶς ἰσοταχῶς καὶ παραλλήλως τῷ ἄξονι ox, τοῦθ' ὅπερ προεβλέπετο.

II^a περίπτωσις ὁριακή. Θεωρῶ καὶ πάλιν διώρυγα μὲ παρειὰς εὐθυγράμμους καὶ παραλλήλους τῷ ox, μὲ εὐθύγραμμον ἐμπόδιον κάθετον τῷ ῥεύματι. Ὑποθέτω ὅτι, τῆς παρειᾶς μ_1 παραμενούσης ἀμετακινήτου, ἡ παρειὰ μ_2 ἀπομακρύνεται ἀπαύστως. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, (σχ. 23), τὸ πλάτος Ω_1 τείνει πρὸς τὸ ∞, ὁμοίως τὸ $\Omega_2 \rightarrow \infty$, ἀλλ' ὁ λόγος αὐτῶν $\frac{\Omega_2}{\Omega_1}=V_\infty$ τείνει προφανῶς πρὸς 1. Ἡ χαρακτηριστικὴ σταθερὰ λαμβάνει τότε τὴν τιμήν: $\zeta_1=e^{i\sigma_1}=\cos\sigma_1+i\sin\sigma_1$



Σχ. 23

$$=\frac{2\,V^2_\infty}{1+V^2_\infty}+i\,\frac{1-V^2_\infty}{1+V^2_\infty}$$

ἥτις, διὰ $V_\infty=1$ γίνεται $\zeta_1=1$

Ἂς ἀναζητήσωμεν εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὴν ἀντίστοιχον ὑδροδυναμικὴν λύσιν. Ἡ γωνία α εἶναι $=\frac{\pi}{2}$. Ἡ σχέσις ἡ ἐκφράζουσα τὴν σύμμορφον καὶ κατὰ τρόπον διπλῶς μονότιμον ἀπεικόνισιν μεταξὺ τοῦ πεδίου ῥοῆς (A) τοῦ σχ. 21, καὶ τοῦ ἡμι-κύκλου $|\zeta| < 1$, $\eta \geq 0$, γράφεται:

$$z - z_2 = \frac{q}{\pi} 2 \int_1^{\zeta} \sqrt{\frac{(\zeta_1+\zeta)(1-\zeta_1\zeta)}{(\zeta_1-\zeta)(1+\zeta_1\zeta)}} \cdot \frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta}$$

ἥτις διὰ $\zeta_1 = 1$, γίνεται

$$z - z_2 = \frac{q}{\pi} \int_1^{\zeta} \frac{\zeta^2+1}{\zeta^2-1} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta}$$

καὶ κατὰ τοὺς ἀνωτέρω ὑπολογισμούς

$$z - z_2 = \frac{q}{\pi} \operatorname{Log} \frac{\zeta^2+1}{2\zeta}$$

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ μιγαδικὸν δυναμικὸν γράφεται

$$\begin{aligned} f(z) &= iq + (z - z_2) = i\Omega_1 + (x - x_2) + i(y - y_2) \\ &= i\Omega_1 + x + iy - i\Omega_1 \\ &= x + iy \end{aligned}$$

Ὁπόθεν προκύπτει $\begin{cases} \varphi = x \\ \psi = y \end{cases}$.

Βλέπω εὐχερῶς ὅτι ἡ ταχύτης ἔχει ὡς συνιστώσας

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 1 \quad \text{καὶ} \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$$

πανταχοῦ τοῦ πεδίου ῥοῆς. Αἱ γραμμαὶ ἴσου δυναμικοῦ

$$\varphi = x = c^{te}$$

εἶναι εὐθεῖαι κάθετοι τῷ τοίχῳ μ_1.

Αἱ γραμμαὶ ῥεύματος

$$\psi = y = c^{te}$$

εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι τῷ ῥεύματι οx, δηλ. τῷ τοίχῳ μ_1. Ὥστε ἡ κίνησις εἶναι: μεταφορὰ ἰσοταχής.

Δύναμαι ὅθεν νὰ εἴπω ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν διώρυγος μὲ πολὺ μέγα πλάτος ἐν σχέσει μὲ τὸ ἐμπόδιον, τὸ ῥεῦμα εἶναι εἰς πρώτην προσέγγισιν μιὰ μεταφορά.

Ἡ ἐλευθέρα γραμμὴ λ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἔχει καμπυλότητα

$\frac{1}{r}=0$, παντοῦ, δηλ. δι᾽ οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ λ. Τοῦτο προκύπτει εἴτε ἐκ τῆς ἐξισώσεως (Χα) ὅταν εἰς αὐτὴν γίνῃ

$$\sin\sigma_1 = {}^{\circ\!}O\rho\left[\frac{1-V^2_\infty}{1+V^2_\infty}\right]=0 \qquad \text{καὶ} \qquad \alpha=\frac{\pi}{2}$$

$$V_\infty = 1$$

εἴτε ἐκ τῆς ἐξισώσεως (5) τοῦ ἀρ. 15, τῆς ὁποίας τὸ 2ον μέλος διὰ $\zeta_1=1$ μηδενίζεται ἐκ ταυτότητος διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς ζ_1 δηλ. εἰς πᾶν σημεῖον. Ἡ ἐλευθέρα γραμμὴ τείνει νὰ γίνῃ εὐθεῖα. Οἴκοθεν νοεῖται ὅτι ταῦτα ἰσχύουσι μόνον διὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ καθέτου ἐμποδίου ($\alpha=\frac{\pi}{2}$) καὶ οὐχὶ τυχούσης κλίσεως.

24. *Περίπτωσις εὐθυγράμμου ἐμποδίου καθέτου τῷ ῥεύματι.*

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην $\alpha=\frac{\pi}{2}$ καὶ ἡ σχέσις (3) τοῦ ἀρ. 23 γράφεται :

$$z-z_2=\frac{q}{\pi}\int_1^{\zeta}\sqrt{\frac{(\zeta_1+\zeta)\left(\frac{1}{\zeta_1}-\zeta\right)}{(\zeta_1-\zeta)\left(\frac{1}{\zeta_2}+\zeta\right)}}\cdot\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta}$$

Ἀλλάσσω ζ_1 εἰς α, καὶ ξ εἰς x (διὰ τὴν εὐχέρειαν τῆς γραφῆς) καὶ προτίθεμαι νὰ ὑπολογίσω τὸ ὁλοκλήρωμα

$$J=\int\sqrt{\frac{(\alpha+x)\left(\frac{1}{\alpha}\ \ x\right)}{(\alpha-x)\left(\frac{1}{\alpha}-x\right)}}\cdot\frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{dx}{x}=\,; \qquad (\alpha<1)$$

Ἐκτελῶ τὸν μετασχηματισμόν: $\alpha+x=\left(\frac{1}{\alpha}-x\right)u^2$ ἐξ οὗ : $x=\frac{u^2-\alpha^2}{\alpha(1+u^2)}$

Τότε ἔχω :

$$1)\qquad \sqrt{(\alpha+x)\left(\frac{1}{\alpha}-x\right)}=\left(\frac{1}{\alpha}-x\right)u=\frac{(1+\alpha^2)\,u}{\alpha(1+u^2)}$$

$$2)\qquad dx=\frac{\alpha\,(1+u^2)\,2u-(u^2-\alpha^2)\,2\,\alpha u}{\alpha^2(1+u^2)^2}=\frac{2u(1+\alpha^2)}{\alpha\,(1+u^2)^2}$$

3) $$\frac{dx}{x} = \frac{2u\,(1+\alpha^2)}{(1+u^2)(u^2-\alpha^2)}$$

4) $$\frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{\dfrac{(u^2-\alpha^2)^2}{\alpha^2(1+u^2)^2}+1} = \frac{(u^2-\alpha^2)^2-\alpha^2(1+u^2)^2}{(u^2-\alpha^2)^2+\alpha^2(1+u^2)^2}$$

$$= \frac{(u^2-\alpha^2)-\alpha^2(1+u^2)^2}{(1+\alpha^2)(\alpha^2+u^4)}$$

5) $$\frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{(u^2-\alpha^2)^2-\alpha^2(1+u^2)^2}{(1+\alpha^2)\,(\alpha^2+u^4)}\cdot\frac{2u(1+\alpha^2)}{(1+u^2)\,(u^2-\alpha^2)} = \frac{2u}{\alpha^2+u^4}\left[\frac{u^2-\alpha^2}{1+u^2} - \frac{\alpha^2(1+u^2)}{u^2-\alpha^2}\right]$$

6) $$\sqrt{(\alpha+x)\left(\frac{1}{\alpha}+\right)} = \sqrt{\left[\alpha-\frac{u^2-\alpha^2}{\alpha(1+u^2)}\right]\left[\frac{1}{\alpha}+\frac{u^2+\alpha^2}{\alpha(1-u^2)}\right]}$$

$$= \frac{1}{\alpha(1+u^2)}\sqrt{\left[2\alpha^2-u^2(1-\alpha^2)\right]\left[u^2+\frac{1-\alpha^2}{2}\right]}$$

$$= \frac{\sqrt{2\,(1-\alpha^2)}}{\alpha\,(1+u^2)}\sqrt{\left(\frac{2\alpha^2}{1-\alpha^2}-u^2\right)\left(u^2+\frac{1-\alpha^2}{2}\right)}$$

θέτων δέ

$$A = \sqrt{\frac{2\,\alpha^2}{1-\alpha^2}} \quad \text{καὶ} \quad B = \sqrt{\frac{1-\alpha^2}{2}}$$

λαμβάνω : $$\frac{\sqrt{2\,(1-\alpha^2)}}{\alpha(1+u^2)}\sqrt{(A^2-u^2)\,(B^2+u^2)} = \sqrt{(\alpha+x)\left(\frac{1}{\alpha}-x\right)}$$

καὶ τὸ ὑπολογιστέον ὁλοκλήρωμα μετ' ἀντικατάστασιν καὶ ἁπλοποίησιν γίνεται

$$J = \frac{2\,(1+\alpha^2)}{\sqrt{2\,(1-\alpha^2)}}\cdot\int\frac{u^2}{\alpha^2+u^4}\left[\frac{u^2-\alpha^2}{1+u^2} - \frac{\alpha^2(1+u^2)}{u^2-\alpha^2}\right]\cdot\frac{du}{\sqrt{(A^2-u^2)\,(B^2+u^2)}}$$

ὅπερ σχίζεται εἰς τὰ κάτωθι δύο ὁλοκληρώματα :

$$J_1 = k\int\frac{u^2(u^2-\alpha^2)}{(\alpha^2+u^4)(1+u^2)}\cdot\frac{du}{\sqrt{(A^2-u^2)(u^2+B^2)}} \quad \text{τῆς μορφῆς : } J_1 = k\int\frac{P_1}{Q_1}\,\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$J_2 = k\int\frac{\alpha^2u^2(1+u^2)}{(\alpha^2+u^4)(u^2-\alpha^2)}\cdot\frac{du}{\sqrt{(A^2-u^2)(u^2+B^2)}} \quad \text{τῆς μορφῆς : } J_2 = k\int\frac{P_2}{Q_2}\,\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

ἔνθα ἐτέθη $k = \frac{2(1+a^2)}{\sqrt{2(1-a^2)}}$

Τὸ ὑπόρριζον τοῦ παρονομαστοῦ τῶν J_1 καὶ J_2 εἶναι τριώνυμον 4ου βαθμοῦ ὡς πρὸς u, διτετραγωνικῆς μορφῆς, συνεπῶς τὰ ὁλοκληρώματα J_1 καὶ J_2 εἶναι ἐλλειπτικά, τοῦ Τύπου III [1]. Ταῦτα ἀνάγονται εἰς τὸν τύπον I διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ $A^2-u^2=u'^2$, εἶτα εἰς τὴν κανονικὴν μορφὴν τοῦ Legendre

$$J = \int \frac{R(u)\, du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \qquad k = c^{te} = \text{module}$$

ὑπὸ τὴν ὁποίαν θὰ ἠδύναντο νὰ ἐκτελεσθῶσι τῇ βοηθείᾳ τῆς συναρτήσεως τοῦ Jacobi snu. (Ἀνάλυσις εἰς ἁπλᾶ στοιχεῖα κλπ). Τὰ εἰρημένα ὁλοκληρώματα θὰ ἠδύναντο ἐπίσης νὰ ὑπολογισθῶσι δι᾽ ἀναγωγῆς αὐτῶν εἰς τὴν κανονικὴν μορφὴν τοῦ Weierstrass

$$J = \int \frac{S(u)\, du}{\sqrt{4u^3-g_2u-g_3}} = z$$

ὁπόθεν ἐξάγεται δι᾽ ἀναστροφῆς: $u = p\,(z; g_2, g_3)$

τοῦθ᾽ ὅπερ θέτει τὸ ὁλοκλήρωμα ὑπὸ τὴν μορφήν: $J = \int S(pu)\, du$, ἔνθα $S(pu)$ = ῥητὴ συνάρτησις ὡς πρὸς pu. Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ὁλοκληρώματος τούτου γίνεται τότε—ὡς γνωστὸν—δι᾽ ἀναλύσεως εἰς ἁπλᾶ στοιχεῖα

$$S(pu) = \frac{A_1}{pu-\alpha} + \frac{A_2}{(pu-\alpha)^2} + \cdots \frac{B_1}{pu-\beta} + \frac{B_2}{(pu-\beta)^2} + \cdots\cdots$$

ἔνθα α, β,... εἶναι οἱ πόλοι κλπ.

Ὁπωσδήποτε καταλήγει τις εἰς πολύπλοκον καὶ δύσχρηστον μορφὴν ἀφοῦ θὰ ἔπρεπε ἀκόμη νὰ λυθῇ ἡ σχέσις $z = z\,(\zeta)$ ὡς πρὸς ζ, διὰ νὰ καταστῇ ἐφικτὴ ἐν τῇ πράξει ἡ μετάβασις ἀπό τινος σημείου τοῦ ἐπιπέδου ζ, εἰς τὸ ἀντίστοιχον τοιοῦτον τοῦ ἐπιπέδου z. Παρατηρῶ ὅτι ἡ z εἶναι ἐν τέλει ἐλλειπτικὴ συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς ζ, δηλ. μερόμορφος ἐν πρώτοις, ἔχουσα ὡς ἀνώμαλα σημεῖα μόνον πόλους τοῦθ᾽ ὅπερ προεβλέπετο καθότι ἡ $z = z\,(\zeta)$ ἐκφράζουσα τὴν σύμμορφον καὶ κατὰ τρόπον διπλῶς μονότιμον ἀπεικόνισιν μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων z καὶ ζ δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ἄλλης φύσεως ἀνώμαλα σημεῖα, ἅτινα κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Weierstrass θὰ ἦσαν

---

[1] Βλ. P. **Appell** et E. **Lacour**, «Principes de la théorie des fonctions Elliptiques», 1922, page 270.

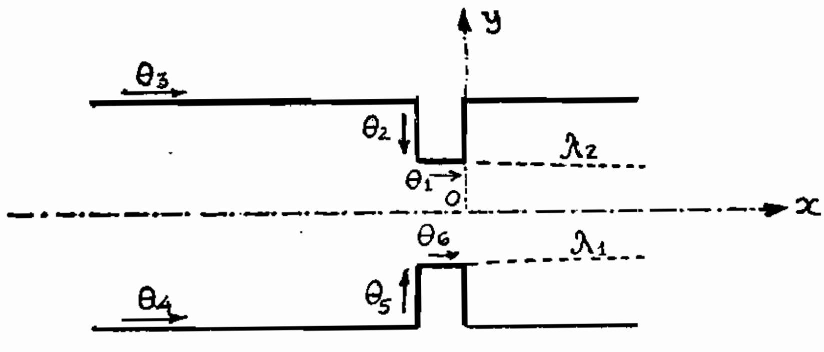
οὐσιώδη ἀνώμαλα δηλ. παρουσιάζοντα πλήρη ἢ μερικὴν ἀπροσδιοριστίαν ἐν τῇ περιοχῇ αὐτῶν, ὅπερ ἀποκλείεται λόγῳ τῆς διπλῆς μονοτιμίας. Τέλος ἡ z εἶναι συνάρτησις περιοδικὴ—καὶ μάλιστα διπλῶς—τῆς μεταβλητῆς ζ, ὅπερ δὲν ἦτο προφανές.

Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἄνω ὁλοκληρωμάτων—τῇ βοηθείᾳ τῶν ἐλλειπτικῶν συναρτήσεων—ἡ ἀριθμητικὴ ἐφαρμογὴ οὐδεμίαν δυσχέρειαν παρουσιάζει, πάντως τὸ ζήτημα τοῦτο ἐκφεύγει τοῦ πλαισίου τῆς παρούσης διατριβῆς.

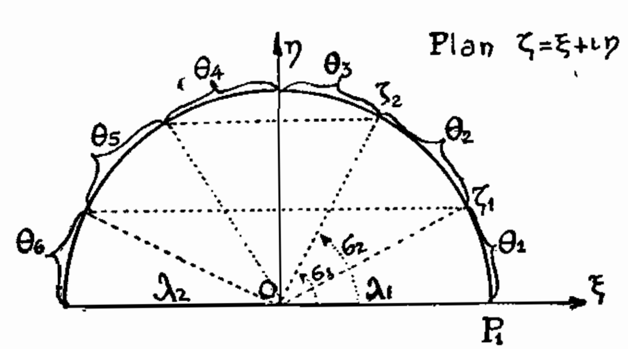
26. ***Τοῖχος-ἐμπόδιον, κάθετος τῷ ῥεύματι.*** Ὡς ἐφαρμογὴν τῆς παρούσης μελέτης δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν περίπτωσιν στερεοῦ ἐμποδίου εὐθυγράμμου μὲν ἀλλὰ μὲ πεπερασμένον πλάτος, καθέτου εἰς τὴν διεύθυνσιν τοῦ ῥεύματος (σχ. 22).

Ὡς ἐμφαίνεται ἐκ τοῦ σχ 22, ἔχομεν :

$$\vartheta_3=\vartheta_4=0, \qquad \vartheta_2=-\vartheta_5=-\frac{\pi}{2} \quad \text{καὶ} \quad \vartheta_1=\vartheta_6=0$$



Σχ. 22



Σχ. 23

Εἶναι ἀπαραίτητον ἐν πρώτοις νὰ ὑπολογίσω τὴν συνάρτησιν ω τοῦ Levi-Civita. Ὁ τύπος (Α) τοῦ ἄρ. 14 δίδει:

$$\omega(\zeta) = \frac{i}{\pi}\left\{ -\frac{\pi}{2}\mathrm{Log.}\frac{\zeta-\zeta_1}{1-\zeta_1\zeta} + \frac{\pi}{2}.\mathrm{Log}\frac{\zeta-\zeta_2}{1-\zeta_2\zeta} + \frac{\pi}{2}.\mathrm{Log}\frac{\zeta-\zeta_4}{1-\zeta_4\zeta} - \frac{\pi}{2}.\mathrm{Log}\frac{\zeta-\zeta_5}{1-\zeta_5\zeta}\right\}$$

ὅπερ γράφεται

$$(1) \qquad \omega(\zeta) = \frac{i}{2}\mathrm{Log}\frac{(\zeta-\zeta_2)(\zeta-\zeta_4)(1-\zeta_1\zeta)(1-\zeta_5\zeta)}{(1-\zeta_2\zeta)(1-\zeta_4\zeta)(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\zeta_5)}$$

Ἀλλ' ἔχομεν: $\zeta_1 = e^{i\sigma_1}$, $\zeta_2 = e^{i\sigma_2}$, $\zeta_4 = -e^{-i\sigma_2} = -\frac{1}{\zeta_2}$, $\zeta_5 = -e^{i\sigma_1} = -\frac{1}{\zeta_1}$

$$1-\zeta_5\zeta = 1 + \frac{\zeta}{\zeta_1} = \frac{\zeta_1+\zeta}{\zeta_1}$$

$$1-\zeta_4\zeta = 1 + \frac{\zeta}{\zeta_2} = \frac{\zeta_2+\zeta}{\zeta_2}$$

$$\zeta-\zeta_5 = \zeta + \frac{\zeta}{\zeta_1} = \frac{1+\zeta_1\zeta}{\zeta_1}$$

$$\zeta-\zeta_4 = \zeta + \frac{1}{\zeta_2} = \frac{1+\zeta_2\zeta}{\zeta_2}$$

Ἀντικαθιστῶν εἰς τὴν (1) λαμβάνω:

$$(2) \qquad \omega(\zeta) = \frac{i}{2}\mathrm{Log}\frac{(\zeta+\zeta_1)(\zeta-\zeta_2)(1+\zeta_2\zeta)(1-\zeta_1\zeta)}{(\zeta-\zeta_1)(\zeta+\zeta_2)(1-\zeta_2\zeta)(1+\zeta_1\zeta)}$$

ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη συνάρτησις. Ἐπαληθεύεται εὐκόλως ὅτι διὰ $\vartheta_1 = \vartheta_6 = 0$ (περίπτωσις λεπτοῦ - εὐθυγράμμου ἐμποδίου καθέτου τῷ ῥεύματι) λαμβάνω τὴν συνάρτησιν (Β) τοῦ Ἀρ. 14 διὰ $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Ἡ σχέσις (2) γράφεται, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι $e^{i\sigma} = \zeta$

$$\omega(\zeta) = \frac{i}{2}\cdot\mathrm{Log.}\frac{(e^{i\sigma}+e^{i\sigma_1})(e^{i\sigma}-e^{i\sigma_2})(1+e^{i(\sigma_2+\sigma)})(1-e^{i(\sigma_1+\sigma)})}{(e^{i\sigma}-e^{i\sigma_1})(e^{i\sigma}+e^{i\sigma_2})(1-e^{i(\sigma_2+\sigma)})(1+e^{i(\sigma_1+\sigma)})}$$

$$= \frac{i}{2}\cdot\mathrm{Log.}\frac{\sin\frac{\sigma_1+\sigma}{2}\cdot\sin\frac{\sigma-\sigma_2}{2}\cdot\cos\frac{\sigma_2+\sigma}{2}\cdot\cos\frac{\sigma_1-\sigma}{2}}{\sin\frac{\sigma-\sigma_1}{2}\cdot\sin\frac{\sigma_2+\sigma}{2}\cdot\cos\frac{\sigma_2-\sigma}{2}\cdot\cos\frac{\sigma_1+\sigma}{2}}$$

$$= \frac{i}{2} \cdot \text{Log.} \frac{\text{tg}\,\frac{\sigma_1+\sigma}{2} \cdot \text{tg}\,\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}}{\text{tg}\,\frac{\sigma+\sigma_2}{2} \cdot \text{tg}\,\frac{\sigma-\sigma_1}{2}}$$

Ἡ σχέσις (β) τοῦ ἀριθ. 14 πληροῦται ἐκ ταυτότητος. Ὅσον ἀφορᾷ τὴν σχέσιν (α) αὕτη δίδει:

$$\vartheta_1 + \frac{i}{\pi} \sum_{1}^{n-1}{}_h (\vartheta_{h+1} - \vartheta_h) \,.\, \text{Log.} \frac{\sin\frac{\sigma_h - \sigma_0}{2}}{\sin\frac{\sigma_h + \sigma_0}{2}} = \beta + i.\text{Log}\, V\infty$$

ὁπόθεν:

$$(3) \qquad \text{Log}\, V\infty = \frac{1}{\pi} \sum_{1}^{n-1}{}_h (\vartheta_{h+1} - \vartheta_h) \,.\, \text{Log.} \frac{\sin\left(\frac{\sigma_h}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\sigma_h}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Ἀλλ' ἔχομεν:

Διὰ $h = 1$ $$\frac{1}{2}\,\text{Log.} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sigma_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma_1}{2}\right)}$$

Διὰ $h = 2$ $$\frac{1}{2}\,\text{Log.} \frac{\sin\left(\frac{\sigma_2}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\sigma_2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Διὰ $h = 3$ $$0$$

Διὰ $h = 4$ $$\frac{1}{2}\,\text{Log.} \frac{\sin\left(\frac{\sigma_4}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\sigma_4}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}\,\text{Log.} \frac{\sin\left(\frac{\sigma_2}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\sigma_2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Διὰ $h = 5$ $$\frac{1}{2}\,\text{Log.} \frac{\sin\left(\frac{\sigma_5}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\sigma_5}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}\,\text{Log.} \frac{\sin\left(\frac{\sigma_1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\sigma_1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Καὶ ἡ σχέσις (3) γίνεται

$$\mathrm{Log}\,V\infty = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Log.}\frac{\sin\left(\frac{\sigma_1}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\sigma_1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} + \mathrm{Log.}\frac{\sin\left(\frac{\sigma_2}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\sigma_2}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right.$$

$$\left. + \mathrm{Log.}\frac{\sin\left(\frac{\sigma_4}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\sigma_4}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} + \mathrm{Log.}\frac{\sin\left(\frac{\sigma_5}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\sigma_5}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right]$$

Ὁπόθεν κατόπιν ἁπλοποιήσεων συνάγομεν

$$V\infty = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sigma_1}{2}\right)\cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sigma_2}{2}\right)}{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sigma_1}{2}\right)\cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sigma_2}{2}\right)}} = \frac{\left(1+\mathrm{tg}\frac{\sigma_1}{2}\right)\left(1+\mathrm{tg}\frac{\sigma_2}{2}\right)}{\left(1-\mathrm{tg}\frac{\sigma_1}{2}\right)\left(1-\mathrm{tg}\frac{\sigma_2}{2}\right)}$$

Συνεπῶς ἡ σχέσις ἡ συνδέουσα τὰ ὁρίσματα σ_1 καὶ σ_2 πρὸς τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος q καὶ Ω_1 (ἢ $V\infty$) εἶναι:

$$\text{(3)} \qquad \frac{\left(1+\mathrm{tg}\frac{\sigma_1}{2}\right)\left(1+\mathrm{tg}\frac{\sigma_2}{2}\right)}{\left(1-\mathrm{tg}\frac{\sigma_1}{2}\right)\left(1-\mathrm{tg}\frac{\sigma_2}{2}\right)} = \frac{q}{\Omega_1} = V\infty$$

Δυνάμεθα νὰ δώσωμεν αὐθαίρετον τιμὴν εἰς τὸ σ_1 (πάντως $\sigma_1 \leq \frac{\pi}{2}$), ἡ σχέσις (3) δίδει τότε τὴν τιμὴν τῆς σ_2 δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς σ_2:

$$\sigma_2 = -2\,\mathrm{arc\,tg}\left[\frac{1+\mathrm{tg}\frac{\sigma_1}{2} - V\infty\left(1-\mathrm{tg}\frac{\sigma_1}{2}\right)}{1+\mathrm{tg}\frac{\sigma_1}{2} + V\infty\left(1-\mathrm{tg}\frac{\sigma_1}{2}\right)}\right]$$

Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ἔκφρασιν τοῦ ὕψους h (= πάχους τοῦ τοίχου - ἐμποδίου) δι' ὑπολογισμοῦ ἀναλόγου πρὸς ἐκεῖνον τῆς ἐσοχῆς τοῦ Borda.

Πράγματι, ἐφαρμόζοντες τὸν ἕτερον τῶν τύπων VIIα τοῦ ἀριθ. 10, ἔχομεν

$$h = \frac{q}{\pi} \int_0^{\sigma_1} e^{-\tau} . \, tg\sigma . \, d\sigma$$

Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ συντελεστοῦ τ τοῦ i ἐν τῇ συναρτήσει ω (ζ), ὑπενθυμίζω ὅτι ἐπὶ τῆς ἡμι - περιφερείας (1, i,—1) ἔχω $\zeta = e^{i\sigma}$ $(0 < \sigma \leq \pi)$ καὶ ἐπειδή

$$\frac{\zeta - \zeta_h}{1 - \zeta \zeta_h} = \frac{\sin \frac{\sigma_h - \sigma}{2}}{\sin \frac{\sigma_h + \sigma}{2}} \qquad (h = 1,2,3,4,5)$$

ἔχομεν

$$\frac{1-\zeta_1\zeta}{\zeta-\zeta_1} \cdot \frac{\zeta-\zeta_2}{1-\zeta_2\zeta} \cdot \frac{\zeta-\zeta_4}{1-\zeta_4\zeta} \cdot \frac{1-\zeta_5\zeta}{\zeta-\zeta_5} = \frac{tg \frac{\sigma_1+\sigma}{2} \cdot tg \frac{\sigma_2-\sigma}{2}}{tg \frac{\sigma_1-\sigma}{2} \cdot tg \frac{\sigma_2+\sigma}{2}}$$

$$= \frac{\sin\sigma_1 + \sin\sigma}{\sin\sigma_1 - \sin\sigma} \cdot \frac{\sin\sigma_2 - \sin\sigma}{\sin\sigma_2 + \sin\sigma}$$

Λαμβάνομεν τότε εὐκόλως:

$$e^{\tau} = \sqrt{\frac{(\sin\sigma_1 + \sin\sigma)\,(\sin\sigma_2 - \sin\sigma)}{(\sin\sigma_1 - \sin\sigma)\,(\sin\sigma_2 + \sin\sigma)}}$$

καὶ τελικῶς

$$h = \frac{q}{\pi} \int_0^{\sigma} \sqrt{\frac{(\sin\sigma_1 - \sin\sigma)\;(\sin\sigma_2 + \sin\sigma)}{(\sin\sigma_1 + \sin\sigma)\;(\sin\sigma_2 + \sin\sigma)}} . \; tg\sigma \; d\sigma$$

ὅπερ ὁλοκλήρωμα ἐκφράζεται διὰ τῶν ἐλλειπτικῶν συναρτήσεων.

ΤΕΛΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην q παριστάνει τὴν παροχὴν τῆς συμμετρικῆς διώρυγος καὶ Ω_1 τὸ σταθερὸν πλάτος αὐτῆς. Διὰ νὰ ἀναφέρωνται οἱ ἀνωτέρω ὑπολογισμοὶ τῶν στοιχείων τῆς κινήσεως εἰς τὴν πραγματικὴν διώρυγα ἀρκεῖ νὰ ἐνθυμηθῶμεν ὅτι τὸ πλάτος τῆς πραγματικῆς διώρυγος εἶναι $\frac{\Omega_1}{2}$ καὶ ἡ παροχὴ αὐτῆς $\frac{q}{2}$.

ΤΕΛΟΣ

MOUVEMENT DISCONTINU D'UN LIQUIDE PARFAIT INCOMPRESSIBLE DANS UN CANAL COMPORTANT UN OBSTACLE ACCOLÉ A L'UNE DE SES PAROIS.

Par A. BRO·I·KOS, ingénieur
Dr ès Sciences Mathématiques.

Les lignes qui suivent constituent un résumé aussi succint que possible d'une thèse de doctorat soutenue devant la Faculté des Sciences de l'Université de Thessaloniki pour l'obtention du grade de Docteur ès Sciences Mathématiques. Je me hâte au préalable d'adresser mes plus vifs remerciements envers MM. Otto Pylarinos et Th. Varopoulo, Professeurs à l'Université de Thessaloniki pour l'intérêt bienveillant dont ils m'ont fait preuve durant l'élaboration de ce travail. De plus je me considère heureux d'exprimer ici ma respectueuse reconnaissance à M. Umberto Cisotti Professeur d' Analyse et de Mécanique des Fluides à l'Université et à l'École Polytechnique de Milan pour son bienveillant encouragement, ses conseils éclairés et le jugement qu'il fit de ce travail avec l'autorité connue sur cette nouvelle branche de la Science qu'est l'Hydrodynamique Plane.

Le sujet de cette thèse inspiré de la technique des travaux hydrauliques, se rapporte à l'étude du mouvement plan et irrotationnel en régime permanent d'un fluide parfait incompressible (liquide) et homogène dans un canal limité par deux parois rigides, comportant un obstacle solide et immuable à parois régulières, accôlé à l'une des parois du canal, cas qui correspond très approximativement à l'écoulement de l'eau dans un fleuve ou canal contenant un épis ou plus généralement un mur obstacle relié à l'une des rives. Il constitue donc une contribution à la solution du problème dit moderne de l'Hydrodynamique du «mouvement d'un fluide parfait rencontrant un obstacle», problème qui a affronté les efforts hardis des géomètres depuis Newton, d'Alembert, Euler jusqu'aux Mathématiciens contemporains sans recevoir une solution définitive à cause des difficultés insurmontables bien connues que présente l'intégration des équations fondamentales de l'Hydrodynamique.

Le mouvement étant supposé plan, le problème a été traité en toute rigueur mathématique par la méthode si ingénieuse et élégante des Physiciens Helmoltz (1868) et Kirchoff (1869) grâce à laquelle on parvient à échapper au paradoxe connu de d'Alembert par une supposition conforme à l'image réelle du mouvement, celle de la DISCONTINUITÉ. On admet en effêt (voir fig 1, du texte Grec) qu'un certain filet liquide g rencontrant l'obstacle solide s au point mort 0 où la vitesse du fluide s'annule, se bifurque à partir de ce point en deux filets distincts enveloppants les parois rigides ϖ_1 et ϖ_2 jusqu'aux points P_1 et P_2 où il y a décollement. A partir de ces points le liquide se meut en formant les lignes libres ou de discontinuité λ_1 et λ_2 à travers lequelles la vitesse du fluide subit une variation finie et brusque alors qu'elle varie continument sur elles. De cette façon il se forme à l'arrière de l'obstacle, une zône stagnante et immuable B dans laquelle le liquide reste en équilibre. Cette supposition constitue la théorie des sillages, qui fondée physiquement par Brillouin, et mise en œuvre par la sus-dite méthode de Helmholtz et Kirchoff a permis le traitement de divers problèmes de l'Hydrodynamique Plane, tout en échappant au paradoxe de d'Alembert. Nous croyons devoir souligner ici l'extension et le perfectionnement considérable que cette méthode a subi ces derniéres années grâce aux travaux remarquables de MM. Levi-Civita, Umb. Cisotti et Henri Villat.

Dans la Ire partie nous rappellons trés brievement les principes fondamentaux de l'Hydrodynamique Plane,le paradoxe de d' Alembert et la mise en œuvre mathématique des hypothèses de la théorie des sillages et des conditions générales et celles à la limite du mouvement à l'aide de la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe et de la représentation conforme du plan de l'écoulement réel z sur un plan fictif complexe ζ.

Dans la IIe partie après avoir mis en évidence la position de notre travail p. r. à ceux de MM. Cisotti et Villat nous commençons par un déplacement du problème à celui plus simple de la veine fluide, opération justifiée pleinement par l'application du Principe des images et conduisant à l'étude du mouvement d'un fluide formant veine symetrique (fig. 6) ce qui permettra des simplifications notables dans l'expression des conditions du mouvement ainsi qu'au calcul des éléments du mouvement. Le nouvean champ d'écoulement constituant un domaine simplement connexe nous poursuivrons se représentation conforme et biunivoque sur un demi-cercle de rayon 1 du plan complexe ζ. La recherche dès lors de la fonction analytique $z=z(\zeta)$ qui permettra cette représentation conforme et biunivoque entre les plans z et ζ est la 1ère question qui se pose. Ce problème déjà difficile de l'Analyse n'admet de solution directe dans notre cas par le fait que le champ d'écoulement a une disposition géometrique inconnue à priori, fonction de l'état cinématique du fluide. On y parvient cependant par une voie détournée que nous résumons. On commence par un transfert des conditions analytiques du mouvement, sur le demi-cercle du plan complexe ζ (fig.8) par des considérations et procédés pour lesquelles nous renvoyons à l'ouvrage magistral «Idromecanica Piana» du Prof. M_r.U. Cisotti. En suivant on détermine dans le plan ζ le potentiel complexe.

$$f = \varphi + i\psi$$

fonction fondamentale, dans laquelle φ désigne le potentiel des vitesses, telle que $u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ et $v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ où u et v sont les composantes suivant ox et oy de la vitesse V. La fonction ψ dite de Stokes fournit les trajéctoires des éléments fluides en mouvement. Pour déterminer cette fonction f dans le plan ζ il n'existe aucune méthode directe. Dans chaque cas on se rapporte aux conditions analytiques du mouvement préalablement transferées—comme il vient d'être dit—sur le demi-cercle du plan ζ et l'on cherche par des essais et tâtonnements une fonction f satisfaisant à toutes les conditions posées. Dans notre problème nous sommes parvenus à construire effectivement cette fonction f, satisfaisant à toutes les conditions du mouvement

$$f(\zeta) = iq + \frac{q}{\pi}. \text{Log.} \left[\frac{1}{2}(\zeta + \frac{1}{\zeta})\right]$$

d'où résultent :

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{q}{\pi}. \text{Log.} \frac{1}{2}\sqrt{\varrho^2 + \frac{1}{\varrho^2} + 2\cos 2\sigma} \\ \psi(\zeta) &= q\left\{1 + \frac{1}{\pi}\text{arc tg}\left[\frac{\varrho^2 - 1}{\varrho^2 + 1} \cdot \text{tg}\sigma\right]\right\} \end{aligned} \right.$$

Ainsi le mouvement du fluide est connu dane le plan ζ. Par des calculs faciles on réçoit l'équation des lignes équipotentielles en coordonnées Cartesiennes ξ et η sur le plan ζ:

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2(\xi^2 - \eta^2) - 1 = 4(\xi^2 + \eta^2)\, e^{\frac{2\mu\pi}{q}}$$

ainsi que celle des lignes du courat :

$$\eta(\xi^2 + \eta^2 - 1) = \lambda\,\xi\,(\xi^2 + \eta^2 + 1)$$

Pour connaitre le mouvement du fluide dans plan réel z il suffit d'établir la rélation $z=z(\zeta)$ qui exprime la représentation conforme et biunivoque entre les plans z et ζ. Celle-ci est obtenue par l'application de de l'équation fondamentale bien connue de l'Hydrodynamique Plane :

$$(1) \qquad w = \frac{df}{dz} = e^{-i\omega}$$

ω étant la fonction de Civita $= \vartheta + i\tau$ où $\vartheta =$ angle de la vitesse V avec $+$ ox, et $\tau = \text{Log } V$. Or f étant connue, l'application de l'équation (1) fournit sans difficultés :

$$z - z_1 = \frac{q}{\pi} \int_{-1}^{\zeta} e^{i\omega} \cdot \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta}$$

qui est la rélation cherchée. Celle-ci constitue de plus la solution générale du problème car grâce à elle nous parviendrons à calculer tous les éléments géométriques, cinématiques et dynamiques du mouvement.

En effet nous donnons dans la IIe partie l'expression analytique explicite des parois ϖ_1 et ϖ_2 de l'obstacle solide ainsi que des parois μ_1 et μ_2 du canal. De même nous donnons les équations parametriques des lignes libres λ_1 et λ_2 ainsi que l'expression de la courbure des ces lignes et de leure arc. Enfin moyennant la relation $w = e^{-i\omega}$ la distribution des vitesses sur le plan ζ est connue, ainsi que celle des pressions du fluide par application de Théorème de Bernouilli. Dans toutes les formules donnant l'expression analytique des éléments ci-haut mentionnés figure la fonction $\omega(\zeta)$ dont la détermination effective ne peut être faite que si l'on donne d'une façon concrète la forme de l'obstacle solide. A cet effet nous avons consideré le cas usuel de l'obstacle-lame placé sons un angle quelquonque α (fig. 9), et avons déterminé la fonction $\omega(\zeta)$ en ramenant le problème à celui de Dirichlet dans le cercle. La formule de Schwartz telle qu'elle a été transformée par M. Cisotti fournit la solution

$$\omega(\zeta) = \frac{i\alpha}{\pi} \text{Log} \frac{(\zeta_1 - \zeta)(1 + \zeta_1 \zeta)}{(\zeta_1 + \zeta)(1 - \zeta_1 \zeta)}$$

qui satisfait à toutes les conditions.

Ceci fait nous sommes parvenus à pousser plus loin une discussion sur les proprietes géométriques des lignes libres λ_1 et λ_2. Par une calcul original assez long nous avons donné l'équation analytique intrinsèque de ces lignes, dégagée de complexes ;

$$\frac{1}{r} = -\frac{4\alpha . \sin\sigma_1}{q} \frac{\sqrt{e^{\frac{2\pi\lambda}{q}} - 1}\left(e^{\frac{\pi\lambda}{q}} - \sqrt{e^{\frac{2\pi\lambda}{q}} - 1}\right)^2}{\left[\left(e^{\frac{\pi\lambda}{q}} + \sqrt{e^{\frac{2\pi\lambda}{q}} - 1}\right)^2 - \cos 2\sigma_1\right]^2 + \sin^2 2\sigma_1}$$

dont la discussion permet de retrouver certaines proprietés caractéri siques bien connues de la théorie des sillages, conformes à l'expérience

La IVe partie de notre travail s'occupe dn calcul de la Résistance opposée par l'obstacle solide au fluide en mouvement. C'est l'inconnue principale du problème à cause de son utilité manifeste pour l art des constructions aérodynamiques. Nous avons traité cette partie du problème en toute généralité en nous plaçant dans le cas absoument général d'un canal à parois quelquonques avec obstacle de orme ar bitraire (fig. 11) et avons donné les formules générales donnant la Résultante des pressions exercées sur l'obstacle par le fluide en mouvement par deux méthodes différentes à savoir : par application du Lemme de Green sur les fonctions harmoniques et du théorème de Euler, qui se vérifient mutuellement.

Comme cas particulier intéressant nous avons envisagé celui d'un canal à parois rectilignes et paralléles à $+$ ox, avec obstacle quelquonque (fig. 12) et avons retrouvé valables pour notre cas les formules $R_x = \frac{\Delta^2}{2s}$ et $R_y = 0$ qui constituent un théorème élégant de Mr U. Cisotti. De la même façon nous avons obtenu es formules donnant la Résultante de pressions exercées sur les parois du canal par le fluide en mouvement.

Enfin, par un calcul qui se rapproche de celui de Mr Cisotti dans un cas analogue nous avons calculé la Résistance rapportée à l'unité de longueur d'une lame-obstacle dans un canal à parois réctilignes et paralléles à $+$ox. (fig. 15). Par un passage à la limite on obtient acilement la formule classique de Lord Rayleigh.

$$\frac{R}{l} = \frac{\pi}{\pi \quad 4}$$

relative an fluide indéfinement étendu dans tous les sens. De cette façon le problème de la Résistance a été résolu dans toute sa généralité.

Dans la Ve partie nous examinous divers cas à la limite intéressants, par application du Principe des images. Ce principe nous a permis par des raisonnements excessivement simples et rapides soit de retrouver certains résultats connus-notamment un théorème remarquable de Mr H. Villat—soit de justifier pleinement certains passages à la limite. Aussi je me permets de souligner ici mon opinion personnelle sur la fécondité et la simplicité de l'application du Principe des images en Hydrodynamique Plane.

Le mouvement du fluide étant connu sur le plan ζ il reste à opérer le passage an plan z du mouvement réel moyennant la rélation

$$(1) \qquad z - z_1 = \frac{q}{\pi} \int_{-1}^{\zeta} e^{i\omega} \frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

qui exprime la représentation conforme et biunivoque entre les plans z et ζ. A cette effet il nous faut effectuer l'intégration du second membre de (1), qui en remplacant ω par sa valeur, s'écrit:

$$z - z_1 = \frac{q}{\pi} \int_{-1}^{\zeta} \left[\frac{(\zeta_1+\zeta)(1-\zeta_1\zeta)}{(\zeta_1-\zeta)(1+\zeta_1\zeta)}\right]^{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

Le calcul de cette intégrale est possible seulement dans le cas $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (lame normale an courant) par les fonctions elliptiques. Nous avons en effet pu ramener le calcul de cette intégrale, par une substitution appropriée, à celui de deux intégrales elliptiques soit sous la forme canonique de Legendre, soit sous la forme normale de Weierstrass. Le calcul effectlf de ces intégrales elliptiques n'offrant aucune difficulté spéciale, sauf la longueur, n'a pas été effectué comme échappant au cadre de ce travail. Ajoutons que pour le cas particulier $\alpha=0$ qui correspond à un canal sans obstacle le calcul donne comme solution hydrodynamique $\varphi=x$ et $y=C^{te}$ ce qui exprime que le mouvement du fluide est une translation uniforme, comme il était à prévoir.

Enfin comme application de notre travail nous avons consideré le cas d'un obstacle—mur avec épaisseur finie. La méthode appliquée reste valable ainsi que toutes les formules donnant les éléments du mouvement sous reserve de calculer la fonction ω y relative. C'est ce calcul effectif que nous avons donné précisement en terminant notre thèse, ainsi que de certains arguments figurants dans les diverses formules, et de l'épaisseur h du mur.

FIN

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Umberto Cisotti: «Idromecanica Piana» 2 τόμοι, Milan 1920.
2. » » «Sul moto di un solido in un canale» (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1909).
3. Henri Villat: «Mécanique des Fluides» (Paris, G. V. 1930).
4. » » «Leçons sur l'Hydroynamique» (Paris, G. V. 1929)
5. » » «Aperçus théoriques sur la Résistance des Fluides» («Scientia» Octobre 1920).
6. » » «Mouvement d'un solide dans un canal» (Annale de l'Ecole Normale 1912).
7. G. Joukowski: «Théorie tourbillonaire de l'hélice propulsive (Paris, G. V. 1929).
8. P. Appell: «Traité de Mécanique Rationnelle» (Paris, 5V., G. V. 1929).
9. Paul Painlevé: «Cours de Mécanique» (Paris, G. V. 1916).
10. A. Massotti: «Appunti storici sur paradosso di d'Alembert» (Rendiconti di Matematiche, 1928).
11. P. Appell et B. Lacour: «Principes de la théorie des fonctions elliptiques» (Paris, G. V. 1922).

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

1. Εἰς παρ. 2 ἀντὶ $v = \frac{\partial\psi}{\partial x}$ γράφε $v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$

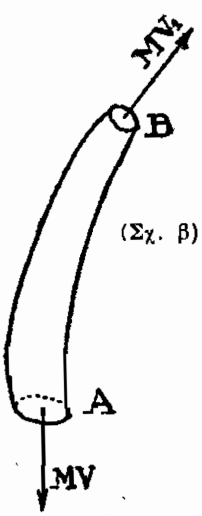
2. Εἰς τὸ σχ. 6 τῆς παραγρ. 5 ἡ μεταξὺ τῶν γραμμῶν μ_2 καὶ μ_1 περιοχὴ δέον νὰ ἀναγραφῇ (A)′ καὶ ὄχι (A).

3. παρ. 11 ἀντὶ $k = \frac{\pi}{q} \cdot \zeta \frac{\zeta^2-1}{\zeta^2-1} \frac{d\vartheta}{\zeta}$ γράφε $k = \frac{\pi}{q} \cdot \zeta \frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1} \frac{d\vartheta}{d\zeta}$

4. Εἰς παρ. 15, «Ἀναλυτικὴ μορφὴ τῆς φυσικῆς ἐξισώσεως»

ἀντὶ $$M = i\zeta_1 \left[\frac{(1-\zeta^2\cos2\sigma_1) + i\sin2\sigma_1\,\zeta^2}{(1-\zeta^2\cos2\sigma_1)^2 + \sin^2 2\sigma_1\,\zeta^4} \cdot \frac{(\cos2\sigma_1-\zeta^2) - i\sin2\sigma_1}{(\cos2\sigma_1-\zeta^2)^2 + \sin^2 2\sigma_1} \right]$$

γράφε $$M = i\zeta_1 \left[\frac{(1-\zeta^2\cos2\sigma_1)^2 + i\sin2\sigma_1\,\zeta^2}{(1-\zeta^2\cos2\sigma_1)_2 + \sin^2 2\sigma_1\,\zeta^4} - \frac{(\cos2\sigma_1-\zeta^2) - i\sin2\sigma_1}{(\cos2\sigma_1-\zeta_2)^2 + \sin^2 2\sigma_1} \right]$$



(Σχ. β)

5. Τὸ ἔναντι σχ. β ἀναφέρεται εἰς τὸ θεώρημα τοῦ E u l e r (παραγρ. 19).

6. Εἰς τὴν ὑπ' ἀρ. 20 παράγρ. ὅπου $V^{\frac{\pi}{\alpha}}_{+}$ γράφε $V^{\frac{\pi}{\alpha}}_{\infty}$ καὶ ὅπου $V^{-\frac{\pi}{\alpha}}_{+}$ γράφε $V^{-\frac{\pi}{\alpha}}_{\infty}$

7. Εἰς τὸν τύπον (XV) τῆς ὑπ' ἀρ. 20 παραγρ. ὅπου sina γράφε sinα.
