ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΟΙΩΜΑΤΑ ΕΠΙ ΠΛΗΜΜΥΡΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ ΠΟΤΑΜΩΝ ΚΑΙ ΧΕΙΜΑΡΡΩΝ

ΥΠΟ

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Α. ΤΕΡΖΙΔΗ*

1. ΔΙΑΦΟΡΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΣΤΑΘΟΥΣ ΡΟΗΣ

Τὰ πλημμυρικὰ κύματα ἐντὸς τῶν φυσικῶν ἀγωγῶν, ὡς εἶναι οἱ ποταμοὶ καὶ οἱ χείμαρροι, ἀνήκουν εἰς τὴν ἀσταθῆ ἢ μὴ μόνιμον ροήν.

Αἱ ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι περιγράφουν τὴν ἀσταθῆ ἢ μὴ μόνιμον ροὴν τοῦ ὕδατος ἐντὸς τῶν φυσικῶν ἀγωγῶν, εἶναι γνωσταὶ εἰς τὴν ὑδραυλικὴν ὡς ἐξισώσεις οὗ Saint - Venant ἢ ἐξισώσεις τοῦ ἀβαθοῦς ὕδατος. Ἀποτελοῦν δὲ τὰς μαθηματικὰς ἐκφράσεις τῶν νόμων τῆς διατηρήσεως τῆς μάζης καὶ τῆς ἐνεργείας ἢ τῆς ποσότητος κινήσεως. Μαθηματικῶς αἱ ἐξισώσεις αὐταὶ χαρακτηρίζονται ὡς ἓν σύστημα δύο πρώτης τάξεως, μὴ γραμμικῶν, μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων τοῦ ὑπερβολικοῦ τύπου. Εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν τῶν φυσικῶν ἀγωγῶν καὶ ὑπὸ τὰς παραδοχὰς τῆς ὁμοιομόρφου κατανομῆς τῆς ταχύτητος, τῆς ὑδροστατικῆς κατανομῆς τῆς πιέσεως ἐπὶ τυχούσης διατομῆς καὶ γνωστῆς κατανομῆς κατ' ἀπόστασιν καὶ χρόνον τῆς πλαγίας παροχῆς, αἱ ἐξισώσεις τοῦ Saint - Venant λαμβάνουν τὴν γενικὴν μορφήν :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = I \qquad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} + g\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{IV}{A} = g(S_0 - S_f) \qquad (2)$$

ὅπου $A = A[y(x,t),x]$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὑγρᾶς διατομῆς,
$V = V(x,t)$ εἶναι ἡ ταχύτης, $VA = Q(x,t)$ εἶναι ἡ κυρίως παροχή,
$I = I(x,t)$ εἶναι ἡ πλαγία παροχή, (εἰσροὴ $I > 0$, ἐκροὴ $I < 0$), g εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος, $y = y(x,t)$ εἶναι τὸ βάθος τῆς ροῆς, S_f εἶναι ἡ κλίσις τοῦ πυθμένος καὶ S_0 εἶναι ἡ κλίσις ἀντιστάσεων λόγῳ τριβῆς καὶ τυρβώδους, ἡ ὁποία δίδεται ὑπὸ ἐμπειρικῶν ἐξισώσεων, ὅπως εἶναι π.χ. ἡ ἐξίσωσις τοῦ Manning :

$$S_f = \frac{n^2 V|V|}{R^{4/3}} \qquad (3)$$

ὅπου n εἶναι ὁ συντελεστὴς τριβῆς κατὰ Manning καὶ R εἶναι ἡ ὑδραυλικὴ ἀκτίς.

* ΓΕΩΡΓΙΟΣ Α. ΤΕΡΖΙΔΗΣ, Τακτικὸς Καθηγητὴς Γενικῆς καὶ Γεωργικῆς Ὑδραυλικῆς καὶ Βελτιώσεων τῆς Γεωπονικῆς καὶ Δασολογικῆς Σχολῆς Α. Π. Θ.

Πολλαπλασιάζοντες τὴν ἐξίσωσιν (1) ἐπὶ V καὶ τὴν ἐξίσωσιν (2) ἐπὶ A, καὶ προσθέτοντες αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἐκτελοῦντες τὰς σχετικὰς πράξεις λαμβάνομεν :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Q}{g}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{gA} + \bar{y}A\right) = A(S_0 - S_f) \qquad (4)$$

ὅπου $\bar{y}$ εἶναι τὸ βάθος τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας ἀπὸ τὸ κέντρον βάρους τῆς ὑγρᾶς διατομῆς A.

Αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (4) ἀποτελοῦν ἐπίσης ἓν σύστημα δύο πρώτης τάξεως μὴ γραμμικῶν μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων τοῦ ὑπερβολικοῦ τύπου, πλὴν ὅμως τοῦτο ἐκφράζει τοὺς νόμους διατηρήσεως τῆς μάζης καὶ τῆς ποσότητος κινήσεως.

Τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμον τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (4), ἐφ' ὅσον αἱ ἐξηρτημέναι μεταβληταὶ αὐτῶν εἶναι συνεχεῖς καὶ παραγωγίσιμοι.

Τὸ σύστημα ὅμως τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (4), πλὴν τοῦ ὅτι εἶναι τοῦ συντηρητικοῦ τύπου καὶ δέχεται ἀσθενεῖς κατὰ Lax λύσεις, ἔχει τὴν ἐπὶ πλέον ἰδιότητα νὰ ἰσχύῃ, ὑπὸ τὴν μορφὴν τῶν πεπερασμένων διαφορῶν, καὶ ὅταν αἱ ἐξηρτημέναι αὐτοῦ μεταβληταὶ εἶναι μὴ συνεχεῖς. Οὕτω, ἀσυνέχειαι τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος ἢ τοῦ πυθμένος, ἰδίως εἰς μικροὺς καταβαθμούς, καθὼς καὶ τοπικαὶ ἀπώλειαι ἐνεργείας λόγῳ τῶν ἀσυνεχειῶν, λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν τοῦ ἐν λόγῳ συστήματος.

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4) ἡ ἐντὸς παρενθέσεων ποσότης τοῦ δευτέρου ὅρου τοῦ ἀριστεροῦ μέλους αὐτῆς συμβολίζεται διεθνῶς μὲ τὸ γράμμα M καὶ καλεῖται συνάρτησις ποσότητος κινήσεως (monentum function), ἤτοι

$$M \equiv \bar{y}A + \frac{Q^2}{gA} \qquad (5)$$

Εἰς τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις ἡ ὑγρὰ διατομὴ A καὶ ἡ ποσότης $\bar{y}A$ ὑπολογίζονται ἐκ τῶν σχέσεων [4] :

$$A = \int_0^y B\,dy \quad \text{καὶ} \quad \bar{y}A = \int_0^y A\,dy \qquad (6)$$

ὅπου B εἶναι τὸ πλάτος τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ἀνοικτῶν ἀγωγῶν ἐκθετικῆς διατομῆς, τὸ πλάτος B τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ἐντὸς αὐτῶν ὕδατος δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς ἁπλῆ συνάρτησις μιᾶς δυνάμεως τοῦ βάθους y, ἤτοι

$$B = Cy^{\nu} \qquad (7)$$

ὅπου C καὶ ν εἶναι σταθεραί, ἐξαρτώμεναι ἐκ τοῦ εἰδικοῦ γεωμετρικοῦ σχήματος τῆς διατομῆς. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (6) καὶ (7) λαμάνομεν :

$$A = \frac{C}{\nu+1}\,y^{\nu+1} \quad \text{καὶ} \quad \bar{y}A = \frac{C}{(\nu+1)(\nu+2)}\,y^{\nu+2} \qquad (8)$$

Αἱ τ μαὶ τῆς σταθερᾶς ν εἶναι $\nu = 0$ διὰ ὀρθογωνικούς, $\nu = 1$ διὰ τριγωνικοὺς καὶ $0 < \nu < 1$ διὰ παραβολικοὺς ἀγωγούς.

Χάριν ἁπλότητος τῆς ἀναλύσεως ἂς λάβωμεν τὴν ἁπλουστέραν περίπτωσιν τῶν ὀρθογωνικῶν ἀγωγῶν διὰ τούς ὁποίους ἔχομεν $B = C =$ σταθερὸν καὶ $\nu = 0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ ἐξισώσεις (1), (2) καὶ (4) λαμβάνουν τὰς μορφάς :

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = i \tag{9}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} + g\frac{\partial y}{\partial x} = g(S_0 - S_f) - \frac{iV}{y} \tag{10}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q^2}{y} + \frac{g}{2}y^2\right) = gy(S_0 - S_f) \tag{11}$$

ὅπου $q = \frac{Q}{B} =$ ἡ ἀνὰ μονάδα πλάτους παροχὴ καὶ $i = \frac{I}{B} =$ ἡ ἀνὰ μονάδα πλάτους πλαγία παροχή.

Συγκρίνοντες τὴν ἐξίσωσιν ποσότητος κινήσεως (11) μὲ τὴν ἐξίσωσιν ἐνεργείας (10) παρατηροῦμεν ὅτι αὐτὴ εὑρίσκεται εἰς πλεονεκτικοτέραν θέσιν διότι : (α) ἔχει ὡς κινηματικὴν μεταβλητὴν τὴν παροχὴν q ἀντὶ τῆς ταχύτητος V καὶ εἶναι γνωστὸν ὅτι συνήθως ἡ παροχὴ q δίδεται εἰς τὰς ὁριακὰς συνθήκας, (β) δὲν ἔχει ὑπὸ ρητὴν ἔκφρασιν τὸν ὅρον τῆς πλαγίας παροχῆς i καὶ (γ) δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ καὶ εἰς περιοχὰς ἐνεργειῶν, ὅπου συνήθως λαμβάνουν χώραν σημαντικαὶ ἀπώλειαι ἐνεργείας λόγῳ προσθέτου τυρβώδους καὶ στροβιλισμῶν.

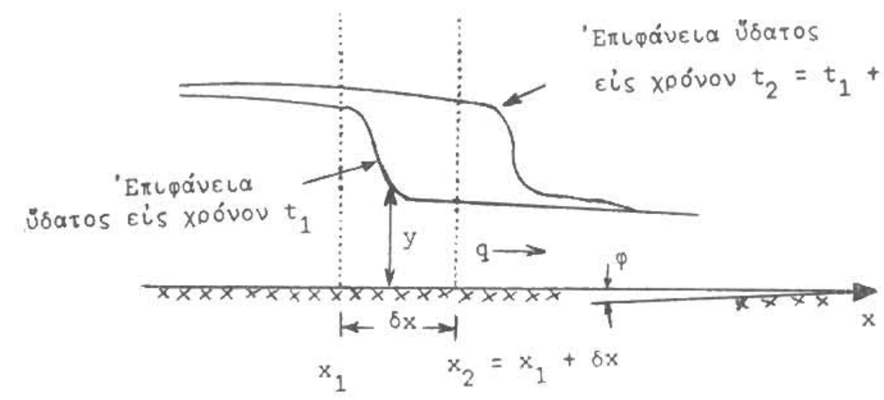
Κατωτέρω παρουσιάζονται ὑπολογιστικὰ σχήματα, βασιζόμενα ἐπὶ τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (9) καὶ (11) ὑπὸ ὁλοκληρωτικὴν μορφήν, κατασκευασθέντα ὑπ' ἐμοῦ **[18]** δυνάμενα νὰ χρησιμοποιηθοῦν διὰ συνεχῆ ὑπολογισμὸν ὁλοκλήρου τοῦ πεδίου ροῆς, χωρὶς τὴν ἀπομόνωσιν τῆς ἀσυνεχείας, ἀνεξαρτήτως ἐντάσεως ταύτης. Ὡρισμένα ἐκ τῶν ὑπολογιστικῶν αὐτῶν σχημάτων ἐφηρμόσθησαν λίαν ἐπιτυχῶς εἰς πρακτικὰ προβλήματα μὴ μονίμου ροῆς μετὰ κινουμένων ὑδραυλικῶν ἁλμάτων.

2. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ἐὰν τὸ προφὶλ ροῆς εἶναι ἀσυνεχές, ἤτοι ἐὰν ὑπάρχουν κινούμενα ὑδραυλικὰ ἅλματα (κύματα shock), τότε αἱ διαφορικαὶ ἐξισώσεις τοῦ Saint - Venant δὲν ἰσχύουν ἐπὶ καὶ πλησίον τῶν ἀσυνεχειῶν. Ἕνα κινούμενον ὑδραυλικὸν ἅλμα χαρακτηρίζεται ὑπὸ τῆς ἀποτόμου τυρβώδους καὶ στενῆς ζώνης διὰ μέσου τῆς ὁποίας τόσον τὸ βάθος ὅσον καὶ ἡ ταχύτης τῆς ροῆς μεταβάλλονται λίαν ἀποτόμως καὶ μία σημαντικὴ ποσότης μηχανικῆς ἐνεργείας μετατρέπεται εἰς τυρβώδες καὶ θερμότητα. Μαθηματικῶς ἕνα κινούμενον ὑδραυλικὸν ἅλμα θεωρεῖται ὡς μία ἀσυνέχεια κατέχουσα μονόπλευρα ὅρια εἰς ἀμφοτέρας τὰς πλευράς. Ἐφ'

ὅσον ἡ ἀνάπτυξις ἑνὸς κινουμένου ὑδραυλικοῦ ἅλματος δύναται νὰ λάβῃ χώραν αὐθορμήτως ἐντὸς τοῦ ἀγωγοῦ καὶ ἐφ' ὅσον φυσικῶς παρατηρεῖται ἡ διατήρησις τῆς μάζης καὶ τῆς ποσότητος κινήσεως κατὰ μῆκος τοῦ ἅλματος, θὰ πρέπῃ ἡ μονοδιάστατος ἀσταθὴς ροὴ μετὰ ἑνὸς πιθανοῦ ἀσυνεχοῦς προφὶλ νὰ περιγράφεται ὑπὸ ἑνὸς συστήματος ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων, βασιζομένων ἐπὶ τῶν νόμων τῆς διατηρήσεως τῆς μάζης καὶ τῆς ποσότητος κινήσεως.

Ἄς θεωρήσωμεν τὰ προφὶλ ροῆς κατὰ τοὺς χρόνους t_1 καὶ $t_2 = t_1 + \delta t$ εἰς τὸ διάστημα $(x_1, x_2 = x_1 + \delta x)$, τὰ ὁποῖα ἐμφαίνονται εἰς τὸ Σχ. 1 ἑνὸς ὀρθο-



Σχ. 1. Προφὶλ ροῆς εἰς χρόνους t_1 καὶ t_2.

γωνικοῦ ἀγωγοῦ σταθερᾶς κλίσεως πυθμένος $S_0 = \text{ἐφ}\ \varphi$ καὶ πλάτους ἴσου πρὸς τὴν μονάδα. Ἔστω $y(x, t)$ τὸ βάθος καὶ $q(x, t)$ ἡ ἀνὰ μονάδα πλάτους παροχὴ τῆς ἀσταθοῦς ἀσυνεχοῦς ροῆς.

Ὑπὸ τὰς κυριωτέρας παραδοχὰς τῆς ὑδροστατικῆς κατανομῆς τῆς πιέσεως, τῆς ὁμοιομόρφου κατανομῆς τῆς ταχύτητος ἐπὶ τῶν διατομῶν 1 καὶ 2, τῆς δυνατότητος τοῦ ἐλεγχομένου ὄγκου νὰ παραμορφοῦται μόνον πρὸς τὴν πλευρὰν τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας καὶ τῆς πιθανότητος ὑπάρξεως ἀσυνεχείας ἐντὸς τοῦ ἐλεγχομένου ὄγκου, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τοὺς νόμους διατηρήσεως τῆς μάζης καὶ ποσότητος κινήσεως καὶ νὰ λάβωμεν, ἀντιστοίχως τὰς ἐξισώσεις :

$$\int_{x_1}^{x_2}[(\rho y)_{t_2} - (\rho y)_{t_1}]\,dx + \int_{t_1}^{t_2}[(\rho q)_{x_2} - (\rho q)_{x_1}]\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\rho i\,dx\,dt \tag{12}$$

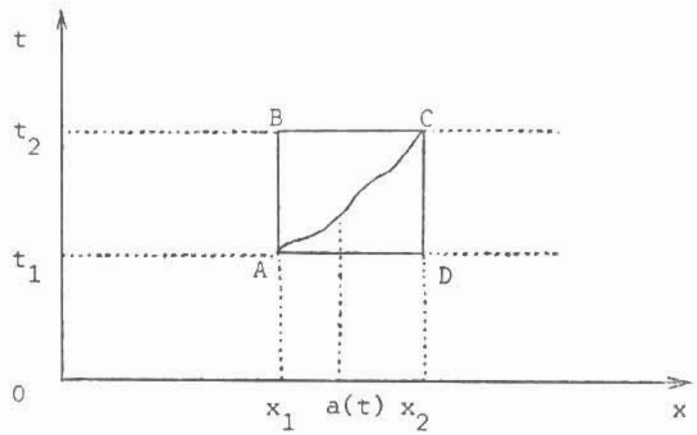
καὶ

$$\int_{x_1}^{x_2}[(\rho yV)_{t_2} - (\rho yV)_{t_1}]\,dx + \int_{t_1}^{t_2}[(\rho qV)_{x_2} - (\rho qV)_{x_1}]\,dt =$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\frac{\rho g y^2}{2}\right)_{x_2} - \left(\frac{\rho g y^2}{2}\right)_{x_1}\right]dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}(\rho g y S_0)\,dx\,dt - \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}(\rho g y S_f)\,dx\,dt \tag{13}$$

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν (12) τὸ πρῶτον ὁλοκλήρωμα ἀντιπροσωπεύει τὴν μεταβολὴν τῆς μάζης εἰς τὸ διάστημα (x_1, x_2) κατὰ τὴν περίοδον τοῦ χρόνου (t_1, t_2), τὸ δεύτερον ὁλοκλήρωμα ἀντιπροσωπεύει τὸ ποσὸν τῆς ροῆς τὸ ὁποῖον ρέει ἐκτὸς τοῦ διαστήματος (x_1, x_2), κατὰ τὸν χρόνον (t_1, t_2) καὶ τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα ἀντιπροσωπεύει τὸ ποσὸν τῆς πλαγίας ροῆς τὸ ὁποῖον εἰσέρχεται ἐντὸς τοῦ ἐλεγχομένου ὄγκου (x_1, x_2) κατὰ τὸν χρόνον (t_1, t_2).

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν (13) τὸ ἀριστερὸν μέλος ἀντιπροσωπεύει τὴν μεταβολὴν καὶ τὴν ἐκροὴν τῆς ποσότητος κινήσεως εἰς τὸ διάστημα (x_2, x_2) κατὰ τὴν περίοδον τοῦ χρόνου (t_1, t_2). ὁ δεξιὸν μέλος ἀντιπροσωπεύει τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνεργουσῶν δυνάμεων, προκαλουμένων ὑπὸ τῆς ὁρμῆς τῶν δυνάμεων πιέσεως, τῆς x - συνιστώσης τοῦ βάρους καὶ τῆς δυνάμεως τῆς ὀφειλομένης εἰς τὰς ἀντιστάσεις τῶν τοιχωμάτων κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ χρόνου (t_1, t_2).



Σχ. 2. Διακοπὴ συνεχείας εἰς τὸ (x, t) ἐπίπεδον.

Ἂς θεωρήσωμεν τώρα τὸ ἐπίπεδον (x, t) τοῦ Σχ. 2 εἰς τὸ ὁποῖον $x = a(t)$ εἶναι ἡ καμπύλη τῆς ἀτραποῦ τὴν ὁποίαν ἀκολουθεῖ τὸ κινούμενον ὑδραυλικὸν ἅλμα. Ἔστω AC οἱονδήποτε τόξον τῆς καμπύλης $\chi = \alpha(t)$. Τὰ σημεῖα A καὶ C πρέπει νὰ ἔχουν συντεταγμένας (x_1, x_1) καὶ $(x_2 = x_1 + \delta x,\ t_2 = t_1 + \delta t)$. Ἐπίπλέον, ἔστω ὅτι τὰ σημεῖα B καὶ D εἶναι τοποθετημένα κατὰ τρόπον ὥστε αἱ πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου ABCD νὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων. Τότε αἱ ἐξισώσεις (12) καὶ (13) δύνανται νὰ γραφοῦν, κατόπιν διαιρέσεως διὰ τῆς πυκνότητος $\rho =$ σταθερά, ὡς τὰ γραμμικὰ ὁλοκληρώματα κατὰ μῆκος τῆς γραμμῆς L τῆς περικλειούσης τὴν περιοχὴν $\widetilde{D}$ (ἐδῶ τὸ ὀρθογώνιον ABCD), ἤτοι:

$$\int_L y dx - q dt = - \iint_{\widetilde{D}} i dx dt \qquad (14)$$

$$\int_L q dx - \left(qV + \frac{gy^2}{2}\right) dt = - \iint_{\widetilde{D}} gy (S_0 - S_f) dx dt \qquad (15)$$

Τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (14) καὶ (15) δίδει τὰς ὁλοκληρωτικὰς ἐκφράσεις τῶν νόμων διατηρήσεως τῆς μάζης καὶ ποσότητος κινήσεως διὰ τὴν γενικὴν περίπτωσιν διὰ τὴν ὁποίαν αἱ ἐμπεριεχόμεναι συναρτήσεις εἶναι τμηματικῶς συνεχεῖς, ἤτοι περιέχουν πεπερασμένον ἀριθμὸν ἀσυνεχειῶν.

Ἐὰν αἱ συναρτήσεις εἰς τὰς ἐξισώσεις (14) καὶ (15) εἶναι συνεχεῖς καὶ παραγωγίσιμοι εἰς τὸ D, τότε συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ Green [**2**] θὰ ἔχωμεν:

$$\iint_{\widetilde{D}} \left(\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} - i \right) dx dt = 0 \qquad (16)$$

$$\iint_{\widetilde{D}} \left[\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{y} + \frac{gy^2}{2} \right) - gy (S_0 - S_f) \right] dx dt = 0 \qquad (17)$$

Ἐεπιδὴ τὸ $\widetilde{D}$ ἐλήφθη αὐθαιρέτως καὶ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὁσονδήποτε μικρόν, αἱ ἐντὸς τῶν ὁλοκληρωμάτων ποσότητες πρέπει νὰ εἶναι μηδενικαί, ἤτοι λαμβάνομεν τὰς διαφορικὰς ἐξισώσεις:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = i \qquad (1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{y} + \frac{gy^2}{2} \right) = gy (S_0 - S_f) \qquad (4)$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐξαγωγὴ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (4) ἐπαληθεύει τὴν ἀρχικῶς διατυπωθεῖσαν ἄποψιν ὅτι αὐτοὶ ἰσχύουν διὰ ἀσταθῆ ροὴν μετὰ συνεχοῦς ἐλευθέρας ἐπιφανείας. Τοῦτο συνάγεται ἐκ τοῦ μετασχηματισμοῦ τῶν ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων (14) καὶ (15) εἰς τὰς διαφορικὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (4), διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τοῦ Green, τὸ ὁποῖον ἰσχύει, ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν αἱ ἐμπεριεχόμεναι συναρτήσεις εἶναι συνεχεῖς καὶ παραγωγίσιμοι. Ὅπως εἶναι ὅμως γνωστὸν αἱ διαφορικαὶ ἐξισώσεις (1) καὶ (4) δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν διὰ τὴν κατασκευὴν ὑπολογιστικῶν σχημάτων πεπερασμένων διαφορῶν τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦνται σήμερον διὰ τὴν ἐπίλυσιν καὶ προβλημάτων κινουμένων ὑδραυλικῶν ἁλμάτων. Ἡ μαθηματικὴ αὐτὴ ἀσυνέπεια τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (4) εἶναι φαινομενικὴ καὶ ὀφείλεται εἰς δύο κυρίως λόγους: (α) εἰς τὴν «ἀλλοίωσιν» τὴν ὁποίαν ὑφίστανται αὐται κατὰ τὴν προσέγγισίν των διὰ τῶν ἐξισώσεων τῶν πεπερασμένων διαφορῶν (π.χ. ἀπὸ ὑπερβολικοῦ τύπου γίνονται παραβολικοῦ τύπου) καὶ (β) εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι τὸ κινούμενον ὑδραυλικὸν ἅλμα δὲν εἶναι εἰς τὴν πραγματικότητα αὐστηρῶς μαθηματικὴ ἀσυνέχεια, ἀλλὰ μία στενὴ τυρβώδης ζώνη διὰ μέσου τῆς ὁποίας αἱ μεταβληταὶ μεταβάλλονται μὲν ἀποτόμως ἀλλὰ εἶναι συνεχεῖς, ἰδίως ὅταν τὸ ὑδραυλικὸν ἅλμα δὲν εἶναι πολὺ ἰσχυρόν. Ἄρα εἰς τὰ ἀσθενῆ καὶ μετρίας ἐντάσεως κινούμενα ὑδραυλικὰ ἅλματα τὸ θεώρημα τοῦ Green ἰσχύει, καὶ κατὰ συνέπειαν, ἰσχύουν καὶ αἱ διαφορικαὶ ἐξισώσεις (1) καὶ (4). Διὰ τὰ ἰσχυρὰ ὑδραυλικὰ ἅλματα θὰ πρέπῃ νὰ χρησιμοποιοῦνται αἱ ὁλοκληρωτικαὶ ἐξισώσεις (14) καὶ (15), αἱ ὁποῖαι φυσικὰ ἰσχύουν καὶ διὰ τὰ ἀσθενῆ καὶ μέτρια κινούμενα ὑδραυλικὰ ἅλματα. Ἐπὶ πλέον αἱ ὁλοκληρωτικαὶ ἐξισώσεις (14) καὶ (15) προσφέρονται καλύτερον καὶ εἰς τὴν κατασκευὴν ὑπολογιστικῶν σχημάτων βασιζομένων ἐπὶ τῆς νεωτέρας μεθόδου τῶν πεπερασμένων στοιχείων [1].

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ — REFERENCES

1. ODEN, J. T.; «Finite - element Analogue of Navier - Stokes Equation», Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. A.S.C.E., Vol. 96, No. EM4, Aug. 1970, pp. 529 - 34.
2. SOKOLNIKOFF, I. S. and REDHEFFER, R. M.: «Mathematics of Modern Engineering», McGraw - Hill Book Co., Inc., 1958.
3. TERZIDIS, G.; «Discontinuous Unsteady Flow in Open Channels», Dissertation presented to the University of California at Davis, Calif., in 1968, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.
4. ΤΕΡΖΙΔΗΣ, Γ.; «Ὑδραυλικὴ — Ι. Ὑδρομηχανική», Θεσσαλονίκη 1973, σελίδες 590.